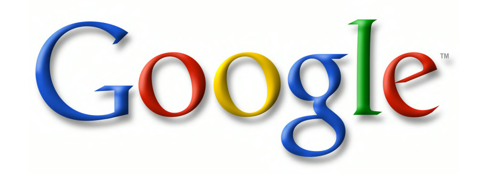
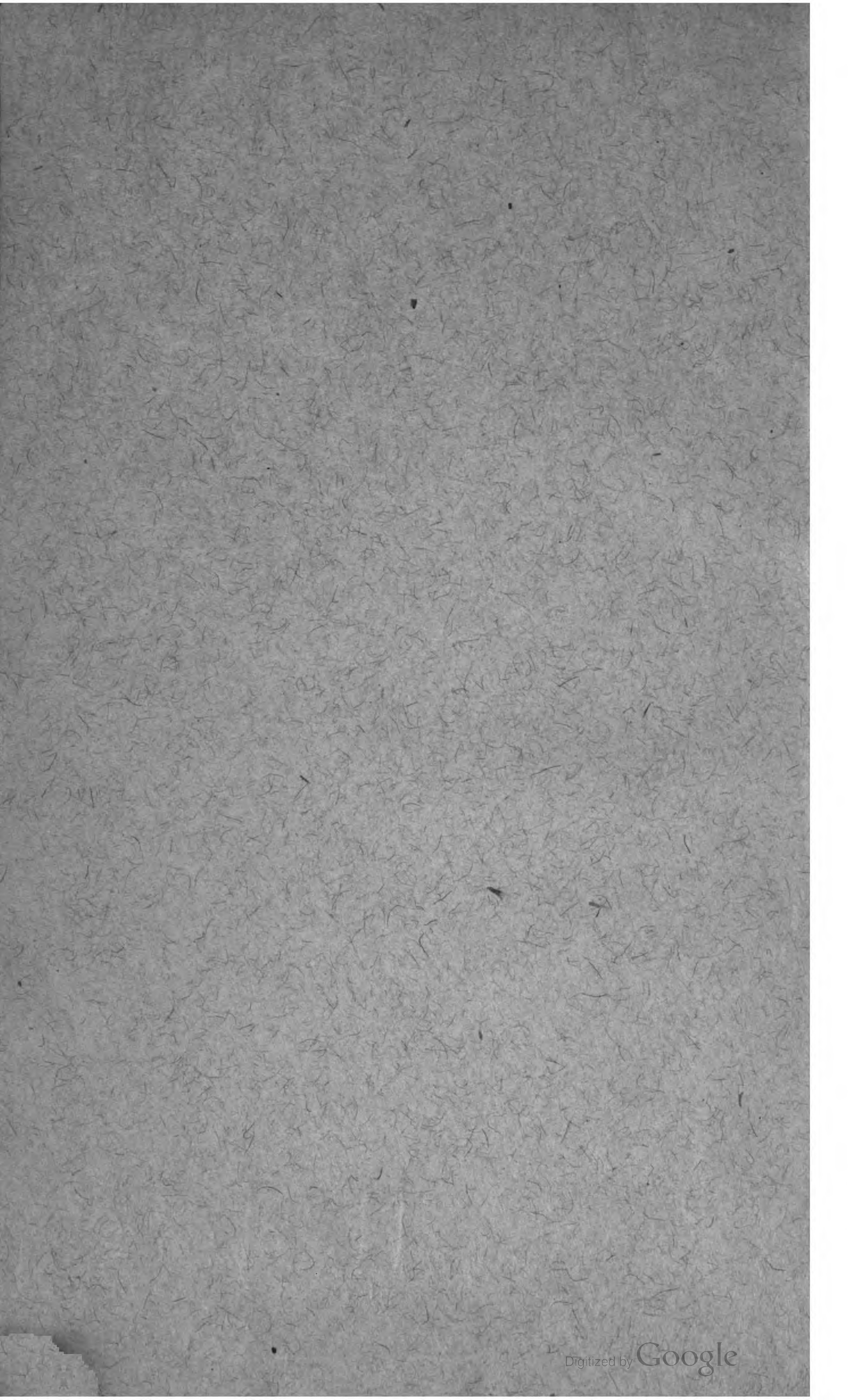






Lehrbuch

der

allgemeinen Arithmetik

nebst

Beispielen und Aufgaben,

zum Gebrauch

bei

dem Unterrichte in Gymnasien und höheren Unterrichtsanstalten,

von

W. Nerling,

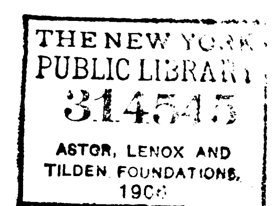
Collegienrath und Ritter, Oberlehrer an dem Gymnasium zu Dorpat.

Zweite umgearbeitete Auflage.

Dorpat.

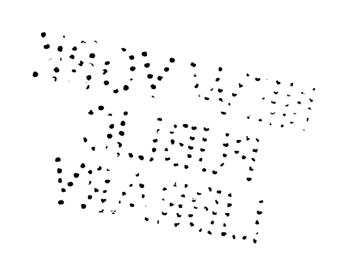
Druck und Verlag von E. J. Karow, Universitätsbuchhändler.

1866.



Von der Censur gestattet.

Dorpat, den 24. October 1865.



Das vorliegende Werk ist erst nach dem Tode des Verfassers herausgegeben, nach dem zum größeren Theil bereits in der Reinschrift vollendeten Manuscript; den zweiten Theil, die Algebra, hatte der Verfasser selbst nur in Concepte vollenden können. Der letzten feilenden Hand des Verfassers hat wie das ganze Werk so in Sonderheit die Vorrede entbehren müssen; sie war nur in vereinzelten, noch nicht zusammengestellten, Bemerkungen aufgezeichnet. Viel an ihr zu ändern, verbot jedoch die Pietät und so ward sie aufgenommen, wie der Verfasser sie in Umrissen entworfen hatte; die daraus etwa entsprungenen Mängel dürfen hoffentlich nachsichtiger Beurtheilung gewiß sein.

Vorrede zur ersten Auflage.

Bei der Abfassung dieses Lehrbuches habe ich besonders auf den Lehrplan für die Gymnasien der Ostseeprovinzen Rücksicht genommen; daher wird man hier Manches vermissen, z. B. die Gleichungen des dritten Grades, die Gaußschen Logarithmen 2c.

Die Behandlung des Stoffes im Unterrichte anlangend, will ich noch erwähnen, daß es nicht meine Absicht ist, als ob der Lehrer alles aus den einzelnen Abschnitten in der Klasse, wo dieselben behandelt werden, vortragen soll. Im Gegentheil mag er nach seinem eigenen Ermessen die schwierigen Sätze erst in Prima durchnehmen und bei der Ausfüllung dieser Lücken den schon gereifteren Schülern nochmals das Ganze in seinem innern logischen Zusammenhange vorführen. Ich thue dasselbe alljährlich und habe es immer von großem Nutzen gefunden.

Mit diesem Lehrbuche ist auch als eine für den Schulunterricht durchaus nothwendige Zugabe eine Sammlung von Beispielen und Aufgaben verbunden. Die Auf-

lösungen dieser Aufgaben habe ich von der Sammlung getrennt, da einige Lehrer dieselben nicht gerne in den Händen der Schüler wissen; auch habe ich in den Auflösungen bei den schwierigen Aufgaben den Gang angedeutet, jedoch so, daß dem Schüler noch immer die Ausführung überlassen bleibt.

Dorpat, den 4. März 1857.

Der Verfasser.

Vorrede zur zweiten Auflage.

„Prüfet Alles und das Gute behaltet“ ist ein alter Spruch, der, auf die Mathematik angewendet, lauten dürfte: „Prüfet Alles und das Wahre behaltet.“ Was ist aber wahr? — Ich nenne in der mathematischen Wissenschaft eine Form wahr, wenn sie einen bestimmten Sinn enthält und diese eine Bedeutung zu jeder Zeit und an jedem Orte behält; eine Rechnung mit Formen wahr, wenn sie den Sinn, die Bedeutung dieser Formen nicht aus den Augen verliert und nicht nach Gesetzen verfährt, welche Formen mit einem andern Sinne zukommen; eine Definition wahr, wenn sie auf Früherem fußend, mit klaren, den vollen Sinn umfassenden, Worten gegeben ist. Hingegen nenne ich unwahr jeden Ausdruck, der an sich keinen Sinn hat, nur der Kürze halber gebraucht wird und bei dem zur Beruhigung des nach dem Sinne Fragenden hinzugefügt werden muß: „Man weiß schon, was man darunter zu verstehen hat.“

Unwahr ist's, die Form $\frac{a}{-b}$ einen Bruch, wahr dagegen, sie ein Verhältniß zu nennen. Ebenso ist der Ausspruch „die negative Zahl ist kleiner als Null“ unwahr. (Ich habe diese Ansicht über die negativen Zahlen in dem Dorpater Schulprogramm vom Jahre 1864 „Mathematische Miscellen“ zu widerlegen gesucht). Die Definition des Multiplicirens: „Multipliciren heißt, eine Zahl so viel mal als Summanden

setzen als eine andere Zahl anzeigt" ist unklar. Das Wort „mal" kommt weder beim Addiren noch beim Subtrahiren vor, kann erst im Anschluß an das Multipliciren erklärt, nicht aber schon zu dessen Definition benutzt werden. — In den meisten Lehrbüchern wird das Potenziren, Extrahiren und Logarithmiren gar nicht definirt, sondern nur, was eine Potenz, eine Wurzel, ein Exponent u. s. w. bedeutet. So erklärt man gewöhnlich den Exponenten (n) als eine Zahl, welche angiebt, wieviel mal die Wurzel (a) als Faktor zu nehmen sei; — wie aber, wenn $n = 1$ oder 0 oder eine negative Zahl ist? Man sagt wohl „a^1 heißt, man soll a einmal als Faktor setzen." Der Ausdruck ist aber durchaus nicht richtig, denn von einem Faktor allein kann ich nicht gut sprechen; beim Worte Faktor muß ich mir mindestens zwei mit einander zu multiplicirende Größen denken. — Beim Extrahiren sagt man oft: „$\sqrt[n]{p}$" bezeichnet eine Zahl, die zur nten Potenz erhoben, p giebt. Ich denke $\sqrt[n]{p}$ zeigt nur an, daß eine bestimmte Rechnungsoperation mit p vorgenommen werden soll, und führe ich die aus, dann erst erhalte ich die verlangte Zahl; z. B. $\sqrt[3]{8}$. Ein Schüler, der die Zahlen kennt aber die dritte Wurzel auszuziehen noch nicht versteht, wird doch gewiß nicht sagen, $\sqrt[3]{8}$ enthält zwei Einheiten; er muß erst die angedeutete Operation ausführen, dann kann er sagen, $\sqrt[3]{8} = 2$. Die obige Erklärung sagt dem Schüler: suche eine Zahl, welche zur dritten Potenz erhoben, 8 giebt. Ich glaube es ist logisch richtiger zu sagen: zerlege 8 in drei gleiche Faktoren und nimm einen solchen Faktor; — da hat der Schüler nichts zu suchen, braucht nur das früher Gelernte anzuwenden. — Noch andere Irrthümer entstehen, wenn man die Rechnungsoperationen an sich als Zahlen betrachten will, z. B. beim Multipliciren. Multipliciren heißt: „aus einer gegebenen Zahl eine

neue ebenso entstehen lassen wie eine andere gegebene Zahl aus der Einheit entstanden ist." $\sqrt{a}.\sqrt{b}$ hieße also, aus $\sqrt{b}$ eine neue Zahl ebenso entstehen lassen wie $\sqrt{a}$ aus der Einheit entstanden ist; nun ist $\sqrt{a}$ aus der Einheit entstanden, indem man a Einheiten addirt und daraus die Wurzel gezogen hat, folglich wird die neue Zahl sein
$= \sqrt{\sqrt{b}+\sqrt{b}\ldots\ldots(\text{a solcher } \sqrt{b})} = \sqrt{a\sqrt{b}}$, — was nicht richtig ist.

Bei Rechnungen mit $\sqrt{-1}$ wendet man dieselben Gesetze an, die für (reelle) Wurzelgrößen gelten. Dies ist unstatthaft, denn $\sqrt{-1}$ ist freilich der Form nach eine Wurzelgröße nicht aber dem Inhalte nach. Man glaubt, wenn man bewiesen hat, daß $\sqrt{a} = \sqrt{a}.\sqrt{1}$ sei, so muß auch $\sqrt{-a} = \sqrt{a}.\sqrt{-1}$ sein, — ist aber noch nicht bewiesen. Oder glaubt man, es dadurch zu beweisen, daß man sagt $-a = x^2$, folglich $x = \sqrt{-a}$? — Die Potenzrechnung lehrt, daß $(\pm x)^2$ nie $-a$ geben kann. Auch hier entsteht, da dies außer Acht gelassen wird, viel Unrichtiges. Daß $1/_2 = 2/_4 = 3/_6$, ist gewiß richtig, folglich wäre, jene unbewiesene Annahme vorausgesetzt, auch $(-1)^{1/2} = (-1)^{2/4}$ $= (-1)^{3/6}$. Nun ist $(-1)^{1/2} = \sqrt{-1}$, $(-1)^{2/4} = \sqrt[4]{(-1)^2}$ $= \sqrt[4]{1} = \pm 1$, und $(-1)^{3/6} = \left[\left((-1)^{1/3}\right)^{1/2}\right]^3 = \left[(-1)^{1/2}\right]^3$ $= -\sqrt{-1}$; also soll $\sqrt{-1} = \pm 1 = -\sqrt{-1}$ sein, was gewiß falsch ist. Ebenso ist nicht bewiesen, daß $(\sqrt{-1})^2$ $= -1$ ist.

Daß ich dennoch die imaginären Größen und die Rechnungen mit ihnen in mein Lehrbuch aufgenommen habe, geschah, weil sie bis jetzt noch in einem Lehrbuche nicht fehlen dürfen; — ich habe sie wenigstens in eine besondere Abtheilung, getrennt von den übrigen und wahren Wurzelgrößen, gesetzt.

Die Erklärung der algebraischen Gleichungen verschiedener Grade sind in den Lehrbüchern oft nicht richtig gegeben. Es heißt in vielen derselben: „Je nachdem in einer Gleichung die unbekannte Zahl in der ersten, zweiten, dritten.... nten Potenz erscheint, unterscheidet man Gleichungen des ersten, zweiten, dritten.... nten Grades." Demnach wäre $ax = bx$ eine Gleichung des ersten, $ax^2 + bx = cx^2$ eine Gleichung des zweiten Grades, was gewiß falsch ist.

Ich bin der Meinung, man darf Form und Inhalt nie aus den Augen verlieren oder gar trennen wollen; achtet man darauf nicht, so kommt man leicht zu unwahren Sätzen. Um dem zu entgehen, ist eine feste Grundlage und ein klarer Ueberblick nöthig; beides erhält man nur durch genaue, leicht verständliche Erklärungen von den Rechnungsoperationen, den verschiedenen Ausdrücken, verschiedenen Größen u. s. w.

Ich habe in meinem Lehrbuche darnach gestrebt, dem Schüler eine solche feste Grundlage und einen klaren Ueberblick zu geben; wie weit es mir gelungen, wage ich nicht zu entscheiden. Jedenfalls aber wird man finden, daß ich etwaige Mängel, welche sich in der ersten Auflage gezeigt, zu verbessern gesucht habe. Schließlich sei noch erwähnt, daß bei jedem Abschnitte die zugehörigen Aufgaben aus der zweiten Auflage meiner „Sammlung von Beispielen und Aufgaben" angefügt worden sind.

Inhalt.

B. Die Algebra.

Erklärungen.

§ 1. Eine Vereinigung gleichartiger Theile zu einem Ganzen nennt man eine Größe.

§ 2. Jede Größe, für sich betrachtet, ist eine Einheit ihrer Art. Eine oder mehrere Einheiten derselben Art bilden eine Zahl. Ist die Art angegeben, so heißt die Zahl benannt, sonst unbenannt. Ist die Menge der Einheiten genau angegeben, so heißt die Zahl auch bestimmt, und die Zeichen dafür sind die Ziffern; im entgegengesetzten Falle werden die Zahlen (unbestimmte) durch allgemeine Zeichen, d. i. die kleinen Buchstaben des lateinischen oder griechischen Alphabets ausgedrückt; doch pflegt man auch den nämlichen Buchstaben öfters anzuwenden und durch angehängte Striche zu unterscheiden [1]).

§ 3. Eine Größe, deren Theile ununterbrochen an einander hängen, so daß das Ende des einen zugleich der Anfang des andern ist, heißt eine stetige (continuirliche, räumliche), eine Raumgröße (Linie, Fläche, Körper); sind die Theile aber von einander gesondert, eine unstetige (discrete), eine Zahlengröße (6 Rbl., 5 Linien).

§ 4. Gleichartig heißen Größen, wenn sie von der nämlichen Art sind, mögen sie auch hinsichtlich der Menge (gleich oder) verschieden sein; ungleichartig, wenn sie nicht von der nämlichen Art sind. Unter den gleichartigen Größen heißen diejenigen entgegengesetzte Größen, welche eine derartige Beziehung zu einander haben, daß sie bei ihrer Vereinigung einander vernichten. Vermögen und Schulden sind z. B. solch' entgegengesetzte Größen, 10 Rbl. Vermögen und 8 Rbl. Schulden vernichten einander in gleicher Anzahl und lassen 2 Rbl. Vermögen nach; ferner Einnahme und Ausgabe, Gewinn und Verlust, ebenso Entfernungen auf

[1]) Franz Vieta, geb. 1540, gest. zu Paris 1603, war es, der zuerst sich der großen Buchstaben als allgemeiner Zahlzeichen bediente. Thomas Harriot, geb. zu Oxford 1560, † 1621, führte den Gebrauch der kleinen lateinischen Buchstaben ein. — Anfangs wurde jede Rechnung ausführlich durch Worte dargestellt, wobei man für die Unbekannte ein entsprechendes Wort, wie Sache, Dinge, Zahl u. s. w. gebrauchte.

einer geraden Linie von einem Punkte aus, nach rechts und links, nach oben und unten, überhaupt Bewegungen in entgegengesetzten Richtungen. So sind bei einer Zahlenreihe, die von der Null als dem Anfangspunkte nach beiden Seiten hin aufsteigt, die Zahlen diesseits der Null entgegengesetzt den Zahlen jenseits der Null; also 4, 3, 2, 1, 0, — 1, — 2, — 3, — 4 oder — 4, — 3, — 2, — 1, 0, 1, 2 3, 4. Derartige entgegengesetzte Größen werden von einander unterschieden durch die Vorzeichen + (positive) und — (negative Größen) [2]).

Zahlen mit Vorzeichen nennt man relative, ohne Vorzeichen absolute Zahlen. Die positiven Zahlen unter sich, eben so die negativen unter sich, nennt man gleichstimmige Zahlen.

§ 5. Jede beliebige Verbindung mehrer Größen unter einander nennt man eine Form (einen Ausdruck). Der doppelte Ausdruck einer und derselben Größe, durch das Gleichheitszeichen (=) verbunden, heißt eine Gleichung; die Größen selbst nennt man gleiche.

§ 6. Von zwei ungleichen Größen (absoluten oder gleichstimmigen Zahlen) heißt diejenige die kleinere, zu welcher man eine größere (absolute oder gleichstimmige Zahl) hinzufügen muß, damit sie der andern (größern) gleich wird. Die Ungleichheit zweier Größen wird durch $>$ oder $<$ bezeichnet, dessen Oeffnung der größeren von beiden zugekehrt ist, z. B. $a > b$ heißt a größer als b, oder $a < b$ heißt a kleiner als b. Man nennt eine solche Verbindung eine Ungleichung.

Anmerk. Zwischen relativen Zahlen, da sie einander entgegengesetzte Größen sind, haben die Ausdrücke: „kleiner und größer", wie $-2 < 0$ oder $-5 > +5$ oder $-4 > -5$ u. s. w. keinen Sinn. Die Sätze von den Ungleichungen gelten nur für absolute Zahlen [3]) *).

§ 7. Die verschiedenen Formen der Größen untersuchen, ihren gegenseitigen Zusammenhang auffinden und aus bekannten Größen unbekannte finden, ist Gegenstand der Mathematik (μάθημα, Kenntniß, Wissenschaft). Sind die stetigen Größen ihr Gegenstand, so heißt sie Geometrie (γῆ, Erde und μετρεῖν, messen), im entgegengesetzten Falle Arithmetik (ἀριθμός Zahl).

---

[2]) Im Jahre 1544 war in Nürnberg eine Arithmetik und Algebra von Michael Stiefel aus Eßlingen erschienen. Hier findet man zum ersten Male die Zeichen + und — (früher p. und m.)

[3]) Albert Girard ein niederländischer Mathematiker († 1633) hat die Ausdrücke „größer als Nichts, kleiner als Nichts" zuerst gebraucht.

*) S. Mathematische Miscellen vom Verfasser. Ein Schulprogramm vom Jahre 1864.

§ 8. Man theilt die Arithmetik in eine gemeine und eine allgemeine. Die gemeine Arithmetik rechnet nur mit bestimmten Zahlen, das Resultat ihrer Berechnungen paßt auf einen einzelnen bestimmten Fall; die allgemeine Arithmetik aber rechnet mit unbestimmten (allgemeinen) Zahlen und das Resultat ihrer Berechnungen ist auf alle Fälle derselben Art anwendbar.

§ 9. Die allgemeine Arithmetik zerfällt in die Buchstabenrechnung und die Algebra (Lehre von den Gleichungen). Die Buchstabenrechnung lehrt uns, wie die durch allgemeine Zeichen ausgedrückten Zahlen verbunden werden, wie die Formen dieser Verbindungen zu verändern sind und untersucht die am leichtesten aufzufindenden Eigenschaften dieser Formen. Die Algebra aber lehrt unbekannte Größen aus gegebenen Eigenschaften derselben durch Gleichungen finden.

§ 10. Es giebt zwei Arten von Gleichungen, die wesentlich von einander unterschieden sind. Die eine Art derselben besteht in einer Verbindung zweier Formen, von denen die eine eine Entwickelung der andern ist und diese Gleichungen nennt man analytische, auch unbedingte, weil die Zahlen von einander unabhängig sind; lauten beide Formen gleich, so nennt man die Gleichung eine identische, z. B. $5 = 5$ oder $4a = 4a$. Mit diesen Gleichungen beschäftigt sich die Buchstabenrechnung. Die andere Art der Gleichungen besteht in der Gleichsetzung mehrerer Größen, in welcher der Werth gewisser Größen von dem Werthe anderer abhängig ist. Jene Größen heißen unbekannte und werden durch die letzten Buchstaben des Alphabets bezeichnet, die andern bekannte. Man nennt die Gleichungen dieser zweiten Art algebraische (bedingte) Gleichungen; mit ihnen beschäftigt sich die Algebra.

Die allgemeine Arithmetik.

A. Die Buchstabenrechnung.

§ 11. Die kleinen Buchstaben bedeuten *beliebige unbenannte Zahlen* und derselbe Buchstabe in derselben Gleichung hat immer einen und denselben Werth.

§ 12. Aus gegebenen Formen andere finden, die zu den gegebenen eine vorgeschriebene Beziehung haben, heißt *rechnen*.

§ 13. Sollen mehrere Größen als ein Ganzes betrachtet und soll mit ihnen *eine* Rechnung vorgenommen werden, so werden sie in eine Klammer ( ) oder [ ] geschlossen. Führt man die (an ihnen) angedeutete Rechnung aus, so heißt das die *Klammer auflösen*.

§ 14. Es giebt *sieben* verschiedene Rechnungsarten (Species) oder Operationen [1]: I. *Addiren*, II. *Subtrahiren*, III. *Multipliciren*, IV. *Dividiren*, V. *Potenziren*, VI. *Extrahiren*, VII. *Exponiren*.

§ 15. Die einfachste Verbindung gegebener Zahlen besteht in der Zusammenfassung der Einheiten dieser Zahlen zu einer Zahl, welches Verfahren man *Addiren* (addo, hinzugeben) nennt.

Addiren heißt die Einheiten mehrerer Zahlen zu einer neuen Zahl vereinigen. Diese neue Zahl heißt *Summe*., die zu vereinigenden Zahlen heißen *Summanden*. Das Zeichen der Addition ist + und heißt **plus**

---

[1]) Oder nur *eine*: das Addiren; denn aus dieser Species sind die andern hergeleitet, als:
1) $s + s, = x$
2) $s + x = m$, so ist $x = m - s$
3) $s + s + s \ldots = x$ „ $x = ns$
4) $nx = p$ „ $x = p : n$ oder $\frac{p}{n}$
5) $a . a . a \ldots = x$ „ $x = a^n$
6) $x^n = p$ „ $x = p^{\frac{1}{n}}$ oder $\sqrt[n]{p}$
7) $a^x =$ „ $x = \overset{a}{\log}.\ p.$

oder mehr. Sind z. B. a und b Summanden, so ist $a + b$ die Summe, oder durch eine Gleichung ausgedrückt $a + b = c$, in welcher Gleichung c die Summe, $a + b$ die Summenform ist.

Anmerkung. Nur in dieser Gleichung ist c eine Summe, steht c allein, so ist c nur eine Zahl.

§ 16. Ist die Summe und ein Summand bekannt, so erhalte ich den andern Summanden, wenn ich die Menge der Einheiten suche, welche zu dem gegebenen Summanden addirt mir die Summe giebt. Dieses Verfahren nennt man subtrahiren (subtraho, wegziehen).

Subtrahiren heißt aus zwei gegebenen Zahlen eine dritte so bestimmen, daß sie mit der einen gegebenen vereinigt, die andere zur Summe giebt. Die gefundene Zahl heißt Rest oder Differenz, diejenige der beiden gegebenen Zahlen, welche mit dem Reste vereinigt wird, heißt Subtrahend, die andere Minuend. Das Zeichen der Subtraktion ist — und heißt minus oder weniger. Ist z. B. c der Minuend und b Subtrahend, so ist $c - b$ die Differenz; oder $c - b = a$, in welcher Gleichung a die Differenz und $c - b$ die Differenzform ist.

1. Folg. Ist $b = c$ in $c - b$, so ist $c - b = c - c = o$, d. h. jede Größe von sich selbst subtrahirt ist Null. Ebenso ist $(c+b) - (c+b) = o$ oder $(c - b) - (c - b) = o$.

2. Folg. $(c - b) + b = c$, d. h. addirt man zur Differenz den Subtrahend, so erhält man den Minuend.

3. Folg. Ist $c - b = a$, so ist $c = a + b$.

4. Folg. Ist $a + b = c$, so ist $a = c - b$ oder $b = c - a$.

5. Folg. $(c + b) - b = c$, d. h. subtrahirt man von der Summe den einen Summanden, so erhält man den andern Summanden.

6. Folg. $(c+b)-b=(c-b)+b$, d. h. das Addiren wird durch das Subtrahiren und umgekehrt aufgehoben, daher diese Rechnungsarten einander entgegengesetzt sind; deshalb sind die entgegengesetzten Vorzeichen auch Rechnungszeichen (Folg. 2 und 5).

§ 17. Sind die Summanden beim Addiren einander gleich, und sind n solch' gleicher Summanden vorhanden, als $a+a+a\ldots\ldots$, so vereinfacht man diese Form in $n \times a$ oder $n \cdot a$ oder na. Dieses Verfahren nennt man multipliciren (multiplico, vervielfältigen).

Anmerkung. Die Punkte hinter a deuten an, daß die Reihe der Summanden nicht geschlossen ist, sondern noch unbestimmt weit (bis n) fortgeht.

Multipliren heißt aus einer gegebenen Zahl eine neue Zahl ebenso entstehen lassen, wie eine andere gegebene Zahl aus der Einheit entstanden ist. Die neue Zahl heißt Produkt, die aus der Einheit entstandene Zahl heißt Multiplicator, die andere Multiplicand. Das Zeichen der Multiplication ist $\times$ oder ein Punkt und heißt mal; die

Buchstaben schreibt man auch ohne irgend ein Zeichen neben einander. Multiplicand und Multiplicator heißen auch mit einem gemeinschaftlichen Namen **Faktoren**, welche gemeinschaftliche Bezeichnung jedoch nur dann zulässig ist, wenn beide unbenannte Zahlen sind. Ist z. B. n der Multicator und a der Multiplicand, so ist na das Produkt; oder $na = d$, in welcher Gleichung d das Produkt und na die Form des Produkts (Produktform) ist.

1. **Folg.** Mit Rücksicht auf die Entstehung der Multiplication aus dem Addiren heißt Produkt die unbekannte gesuchte Summe, Multiplicand der (gleiche) Summand und Multiplicator die Anzahl der (gleichen) Summanden.

2. **Folg.** Die Multiplication ist eine Addition mit einem und demselben in bestimmter Anzahl wiederkehrenden Summanden. Es ist z. B. $4a = a + a + a + a$.

3. **Folg.** Der Multiplicator 1 kann beliebig weggelassen und hinzugefügt werden. $1a = a$.

§ 18. Ist das Produkt und ein Faktor bekannt, so erhalte ich den andern Faktor, indem ich eine Zahl suche, die mit dem gegebenen Faktor multiplicirt mir das Produkt giebt. Dieses Verfahren nennt man **Dividiren** (divido, zertheilen).

Dividiren heißt aus zwei gegebenen Zahlen eine dritte so bestimmen, daß sie, mit der einen multiplicirt, die andere zum Produkt giebt. Die gefundene Zahl heißt **Quotient**; diejenige der beiden gegebenen Zahlen, welche mit dem Quotienten multiplicirt wird, heißt **Divisor**; die andere **Dividend**. Das Zeichen der Division ist : und heißt **durch**, oder der Dividend wird vom Divisor durch einen Strich getrennt. Ist z. B. b der Divisor und a der Dividend, so ist der Quotient $a:b$ oder $\frac{a}{b}$ (a durch b) oder $b \mid a$ (b in a). Durch eine Gleichung ausgedrückt wäre es $\frac{a}{b} = c$, $a:b = c$ oder $b \mid a = c$, in welcher Gleichung c der Quotient und $\frac{a}{b}$ die Form des Quotienten ist.

1. **Folg.** Hinsichtlich der Entstehung des Dividirens aus dem Multipliciren heißt Quotient der unbekannte gesuchte Faktor, Divisor der gegebene Faktor und Dividend das (gleichfalls gegebene) Produkt.

2. **Folg.** $\frac{a}{b} \cdot b = a$, oder wenn $\frac{a}{b} = c$, so ist $a = cb$.

3. **Folg.** Wenn $cb = a$, so ist $c = \frac{a}{b}$ oder $b = \frac{a}{c}$.

4. Folg. $\frac{a}{a} = 1$, d. h. ist der Dividend dem Divisor gleich, so ist der Quotient 1, wenn a nicht Null ist. Hingegen $\frac{a-a}{a-a}$ (42. Lehrs. Zus.) ist ganz unbestimmt.

5. Folg. $\frac{a}{1} = a$, d. h. der Divisor Eins kann beliebig weggelassen und hinzugefügt werden.

6. Folg. $\frac{ab}{b} = a$, d. h. wenn man das Produkt zweier Zahlen durch die eine dividirt, so erhält man die andere.

7. Folg. $\frac{a}{b} \cdot b = \frac{ab}{b}$ (Folg. 2 und 6).

§ 19. Sind in einem Produkt n Faktoren vorhanden und alle einander gleich, als $a \cdot a \cdot a \ldots$ oder $\frac{1}{a} \cdot \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{a} \ldots$, so drückt man diese Form durch a^n oder a^{-n} aus, welches Verfahren potenziren (potentia, Kraft, Vermögen sich zu erhöhen) heißt[5]).

Potenziren heißt die Einheit mit so viel gleichen Faktoren multipliciren oder durch so viel gleiche Faktoren dividiren, als eine andere Zahl Einheiten enthält. Die gefundene Zahl heißt Potenz, der gleiche Faktor Wurzel (Grundfaktor) und die Anzahl der gleichen Faktoren Exponent; er ist beim Multipliciren positiv, beim Dividiren negativ. Das Zeichen des Potenzirens besteht darin, daß man den Exponenten oben rechts bei der Wurzel schreibt. Ist z. B. a die Wurzel und n Exponent, so ist $a^{\pm n}$ die Potenz, oder $a^{\pm n} = b$, in welcher Gleichung b die Potenz und $a^{\pm n}$ die Potenzform ist.
Man sagt, a hoch n oder a zur nten Potenz, oder die nte Potenz von a.

1. Folg. $a^1 = a$, d. h. der Exponent Eins kann beliebig weggelassen und hinzugefügt werden.

2. Folg. $a^0 = 1$, d. h. jede Zahl zur Nullten Potenz ist Eins. a^0 heißt die Einheit soll mit keinem Faktor multiplicirt werden, also bleibt die Einheit unverändert.

3. Folg. 1) $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$, 2) $\left(\frac{1}{a}\right)^n = \frac{1}{a^n} = a^{-n}$,

3) $\left(\frac{1}{a}\right)^{-n} = \frac{1}{a^{-n}} = a^n$. 4) $1 : \frac{1}{a^n} = a^n$.

---

[5]) Cartesius oder René Descartes, geb. 1596, gest. 1650 zu Stockholm, führte zuerst die jetzige Bezeichnungsart der Potenzen ein.

§ 20. Ist in einer Potenz die Wurzel unbekannt, dagegen Potenz und Exponent bekannt, so ist die Form für die Wurzel (radix) $(a^m)^{\frac{1}{n}}$ oder $\sqrt[n]{a^m}$, welches Verfahren extrahiren (extraho, herausziehen) heißt.

Extrahiren (radiciren) heißt eine gegebene Zahl in so viel gleiche Faktoren zerlegen, als eine andere gegebene Zahl Einheiten enthält und einen solchen Faktor nehmen. Der gesuchte Faktor heißt Wurzel, diejenige der beiden gegebenen Zahlen, welche in (gleiche) Faktoren zerlegt werden soll, heißt Potenz (Radicand) oder Zahl, die andere (die Anzahl der gleichen Faktoren) Wurzelexponent. Da der Wurzelexponent das Getheilte anzeigt, so wird er in Bruchform oben rechts bei der Potenz geschrieben, oder mit einem verschobenen r ($\sqrt{}$) [6]) z. B. $\sqrt[n]{}$ vor die Zahl gesetzt. Durch eine Gleichung ausgedrückt wäre es $\sqrt[n]{a} = b$, in welcher Gleichung b die Wurzel und $\sqrt[n]{a}$ (die nte Wurzel aus a) oder $a^{\frac{1}{n}}$ (a hoch $\frac{1}{n}$) die Wurzelform ist.

1. Folg. Wenn $b^n = a$, so ist $b = \sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$, und umgekehrt ist $\sqrt[n]{a} = b$ oder $a^{\frac{1}{n}} = b$, so ist $a = b^n$.

2. Folg. $(\sqrt[n]{a})^n = a$ oder $\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^n = a$, d. h. wenn man eine Wurzel mit dem Wurzelexponent potenzirt, so erhält man die Potenz.

3 Folg. $\sqrt[n]{a^n} = a$, oder $\left(a^n\right)^{\frac{1}{n}} = a$, d. h wenn man eine Potenz mit ihrem Exponent extrahirt, so erhält man die Grundzahl der Potenz.

4. Folg. $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = \sqrt[n]{a^n}$, oder $\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^n = \left(a^n\right)^{\frac{1}{n}}$

5. Folg. $\sqrt[n]{1} = 1$.

§ 21. Ist in einer Potenz der Exponent unbekannt, Potenz und Wurzel aber bekannt, so ist die Form für den Exponenten $\overset{a}{\log}.\ b$, welches Verfahren man exponiren (expono, hinsetzen, anzeigen) oder logarith-

---

6) Das Wurzelzeichen $\sqrt{}$ wurde zuerst durch Michael Stiefel (1552) eingeführt.

miren[7]) nennt. Exponiren oder logarithmiren heißt die Anzahl der gleichen Faktoren einer gegebenen Zahl auffinden. Die gegebne Zahl heißt Numerus (Potenz, natürliche Zahl), der gleiche Faktor Basis (Grundzahl) und die Anzahl der gleichen Faktoren Logarithmus (Exponent). Das Logarithmiren wird bezeichnet, indem man vor die Potenz log. setzt und darüber die Basis, z. B. $a^\alpha = b$, giebt $\alpha = \overset{a}{\log}.\, b$ und wird gesprochen: Logarithmus b von der Basis a; d. h. man suche den Exponenten, wenn der Numerus b und die Basis a ist.

§ 22. Eine unter gewissen Bedingungen aufgestellte Behauptung heißt ein Lehrsatz, eine mit Hinzuziehung gewisser gegebener Bedingungen gestellte Forderung eine Aufgabe.

§ 23. Die Darlegung der Wahrheit des im Lehrsatze Behaupteten heißt der Beweis des Lehrsatzes; die Ausführung des in der Aufgabe Verlangten die Auflösung der Aufgabe.

§ 24. Wenn aus einem Lehrsatze oder einer Aufgabe ein anderer Satz als Folgerung hergeleitet wird, so heißt er Zusatz.

§ 25. Die Beweise beruhen auf allgemeinen Wahrheiten, die man Grundsätze nennt.

§ 26. Die Darstellung eines arithmetischen Gesetzes in Zeichen (in mathematischer Sprache) heißt eine Formel.

Grundsätze.

1) Jede Größe ist sich selbst gleich. $a = a$.

2) Gleiche Größen kann man beliebig für einander setzen. Ist $a = b$, so kann man a für b oder b für a setzen; a enthält ebenso viele Einheiten als b, nur kann die Form verschieden sein, z. B. $3 + 5 = 4 . 2$.

3) Das Ganze ist gleich der Summe aller seiner Theile. $s = a + b + c$.

4) Ein Theil ist kleiner als das Ganze, und das Ganze größer als einer seiner Theile. $a < s$ oder $s > b$.

5) Wenn eine Größe kleiner (oder größer) ist als eine zweite, und diese wieder kleiner (oder größer) als eine dritte u. s. w., so ist auch die erste kleiner (oder größer) als die letzte.

---

[7]) Von λόγων ἀριθμός, bezeichnet Verhältnißzähler oder Verhältnißmesser. Man nannte nämlich, wenn $a : b$ als Grundverhältniß angenommen, $a^2 : b^2$ das doppelte, $a^m : b^m$ das mfache Verhältniß oder $a^{\frac{n}{m}} : b^{\frac{n}{m}}$ das nfache und mgetheilte Verhältniß; so waren 2, m, $\frac{n}{m}$ der Logarithmus des Verhältnisses $a^2 : b^2$, $a^m : b^m$ u. s. w. in Beziehung auf $a : b$.

1) Wenn $a < b$ oder 2) $a > b$

$$\begin{array}{ll} a < b & a > b \\ b < c & b > c \\ c < d & c > d \\ \hline a < c & a > c \\ a < d & a > d \end{array}$$

so ist auch $a < c$ bzw. $a > c$; $a < d$ bzw. $a > d$

Anmerkung. Ein wagerechter Strich, unter einem Satze (Gleichung oder sonst einem Ausdruck) angebracht, heißt folglich.

Erster Abschnitt.

Von den Summen und Differenzen.

Anmerkung. Die Summanden, so wie der Minuend und Subtrahend können auch benannte Zahlen sein, nur müssen sie unter einander gleichartig sein; die Summe wie die Differenz ist dann von derselben Art.

1 Lehrs. Wenn zwei Größen einer dritten gleich sind, so sind sie einander gleich.

$$\left.\begin{array}{l} a = b \\ c = b \end{array}\right\} \text{Bedg.}$$

$$a = c \text{ Behptg.}$$

Bew. Wenn $a = b$ und $c = b$, so ist, da man (Grds. 2) c für b setzen kann, auch $a = c$.

2. Lehrs. Gleiches zu Gleichem addirt oder von Gleichem subtrahirt giebt Gleiches.

$$\left.\begin{array}{l} a = b \\ c = d \end{array}\right\} \text{Bedg.}$$

$a \pm c = b \pm d$ Behptg. ($\pm$ heißt plus oder minus).

Bew. Es sei $a = b$ und $c = d$ und nach Grdsß. 1 ist $a \pm c = a \pm c$; setzt man auf der rechten Seite der Gleichung b für a und d für c, so ist $a \pm c = b \pm d$.

Zus. Wenn $a = b$, so ist auch $a \pm c = b \pm c$.

3. Lehrs. Die Ordnung der Summanden ist willkürlich.

Behptg. $a + b = b + a$.

Bew. Gegeben ist $1+1+1\ldots$ (a Einheiten) $+1+1\ldots$ (b Einheiten). Addirt man von der linken nach der rechten Seite die Einheiten zusammen, so erhält man $a+b$, addirt man von der rechten nach der linken Seite, so erhält man $b+a$, folglich ist $a+b=b+a$.

1. Zus. Ist in $a+b=b+a$ $b=$ Null, so ist $a=+a$, d. h. jede Zahl ohne Vorzeichen ist gleich derselben positiven.

2. Zus. $a+a=2a$ (§ 2) und $2a+a=3a$. Ebenso ist $5a+6a=11a$.

§ 27. Erklärung. Die Zahl, welche anzeigt, wie oft die allgemeine Zahl zu sich selbst addirt werden soll, heißt der Coefficient.

3. Zus. Auch mehrere Zahlen kann man addiren, indem man zur 1sten die 2te, zu ihrer Summe die 3te u. s. w. addirt. $a+b+c=(a+b)+c=(a+c)+b=(b+a)+c=(b+c)+a=(c+a)+b=(c+b)+a$. Ebenso ist $a+b+c+d=(a+b)+(c+d)$.

4. Zus. Wird in $(a+b)+(c+d)=a+b+c+d=b+d+a+c$ für a und c Null gesetzt, so ist $(+b)+(+d)=b+d$. Ist a und b Null, so ist $+(c+d)=c+d$.

§ 28. Erklärung. Gleichnamige Zahlen sind solche, welche gleiche Buchstabenausdrücke (Rechnungsausdrücke mit denselben Buchstaben), mit verschiedenen oder gleichen Coefficienten und Vorzeichen versehen, enthalten; alle anderen Zahlen heißen ungleichnamig. z. B.

$\left.\begin{matrix}4a\\-7a\\{}^3/_4a\end{matrix}\right\}$ oder $\left.\begin{matrix}2(a+b)\\-5(a+b)\\0{,}3(a+b)\end{matrix}\right\}$ sind gleichnamig; $\left.\begin{matrix}9a\\19b\\-9ab\end{matrix}\right\}$ sind ungleichnamig.

1. Aufg. Gleichnamige und ungleichnamige Zahlen zu addiren.

Aufl. Man schreibe die gleichnamigen unter einander, die ungleichnamigen neben einander und addire, z. B.

a) $5a+7b+90c+8a+11b+c+13a+2b+3c$

schreibe man:
$$\begin{array}{l}5a+7b+90c\\8a+11b+c\\13a+2b+3c\\\hline 26a+20b+94c\end{array}$$

b) $[5a+6b+7cd+0{,}4(a+b)]+[4a+{}^3/_4b+9cd+2{,}5(a+b)]+[8a+{}^1/_2b+17cd+4{,}6(a+b)]$
$$\begin{array}{l}=5a+6b+7cd+0{,}4(a+b)\\\quad 4a+{}^3/_4b+9cd+2{,}5(a+b)\\\quad 8a+{}^1/_2b+17cd+4{,}6(a+b)\\\hline 17a+7{}^1/_4b+33cd+7{,}5(a+b).\end{array}$$

Setzt man für die Buchstaben bestimmte Zahlen, als $a=2$, $b=4$, $c={}^1/_3$, $d=3$, so ist die Summe $34+29+33+45=141$.

(Aufg. Sammlg. § 2. 4, 5, 7—14, 16, 17).

4. Lehrs. Wenn eine Zahl a, eine Summe $b + c$ und eine Differenz $b - c$ gegeben sind, so wird behauptet, daß

I. $a + (b + c) = a + b + c$
II. $a + (b - c) = a + b - c$
III. $(b + c) - a = b + c - a$
IV. $(b - c) - a = b - c - a$
V. $(b - c) + a = b - c + a$
VI. $a - (b + c) = a - b - c$
VII. $a - (b - c) = a - b + c.$

Bew. I. (3. Lehrs. 3. Zus.)

II. $a + (b - c) + c = a + b$ (§ 16, 2 Folg.)
$a + b - c + c = a + b$

$a + (b - c) + c = a + b - c + c$
subtrahirt $c = c$

$a + (b - c) = a + b - c$ (2. Lehrs.)

Ebenso beweiset man III und IV.

1. Zus. Ist $a = o$ in $a + (b - c) = a + b - c$, so ist $+ (b - c) = + b - c$; folglich auch V $(b - c) + a = b - c + a$.

2. Zus. Ist $b = o$ in $+(b - c) = +b - c$, so ist $+(-c) = -c$..

VI. $a - (b + c) + (b + c) = a$
$a - b - c + b + c = a - b - c + c + b = a - b + b = a$ (3. Lehrs.)

$a - (b + c) + (b + c) = a - b - c + b + c$
subtrahirt $+ (b + c) = + b + c$ (Lehrs. 3, Zus. 4).

$a - (b + c) = a - b - c$

3. Zus. Ist $a = o$ in $a - (b + c) = a - b - c$, so ist $-(b + c) = -b - c$.

4. Zus. Ist $b = o$ in $-(b + c) = -b - c$, so ist $-(+c) = -c$.

VII. $a - (b - c) + (b - c) = a$
$a - b + c + b - c = a - b + b + c - c = a$

$a - (b - c) + (b - c) = a - b + c + b - c$
subtrahirt $+ (b - c) = + b - c$ (II. 1. Zus.)

$a - (b - c) = a - b + c.$

5. Zus. Wird in $a - (b - c) = a - b + c$ für a Null gesetzt, so ist $-(b - c) = -b + c$.

6. Zus. Ist $b = o$ in $-(b - c) = -b + c$, so ist $-(-c) = +c$.

5. Lehrs. Ist der Subtrahend größer als der Minuend, so ist die Differenz eine negative Zahl.

Bew. Es sei a der Minuend und $(a+b)$ der Subtrahend, so ist $a-(a+b)=a-a-b=-b$ (4. Lehrs. VI).

6. Lehrs. Es ist immer:

I. $a+(+c)=a+c$	III. $a-(+c)=a-c$
II. $a+(-c)=a-c$	IV. $a-(-c)=a+c$

Bew. Man setze in Lehrs. 4. I, II, VI, VII $b=o$.

7. Lehrs. Die Ordnung in welcher man ein und dieselben Zahlen addirt und subtrahirt, ist beliebig.

Bew. Da

$$a+b-c+c=a+b$$
$$a-c+b+c=a-c+c+b=a+b$$
$$b+a-c+c=b+a=a+b$$
$$b-c+a+c=b-c+c+a=b+a=a+b$$
$$-c+a+b+c=-c+c+a+b=a+b$$
$$-c+b+a+c=a+b$$

sso ist: $a+b-c=a-c+b=b+a-c=b-c+a=-c+a+b=-c+b+a$

8. Lehrs. Vertauscht man bei einer Subtraction Minuend und Subtrahend mit einander, so verwandelt sich die Differenz in die entgegengesetzte Zahl, d. h. war sie bis dahin eine positive Zahl, so wird sie jetzt eine negative und umgekehrt, z. B. $a-b=d$, folglich $b-a=-d$ und umgekehrt.

Bew. Es sei $a-b=d$, so ist $a=d+b$ und $b-a=b-(d+b)=b-d-b=b-b-d=-d$.

§ 29. Erklärung: Eine Zusammenstellung von positiven und negativen Zahlen zu einem Ganzen heißt ein Polynom oder eine vielgliedrige Zahl, jedes Glied für sich heißt ein Monom. Die Polynome führen je nach der Anzahl ihrer Glieder noch besondere Namen als Binome, Trinome u. s. w. z. B.

$3a+5b-6dg$ (Trinom) und $4a+7bd$ (Binom).

9. Lehrs. Hat man Zahlen mit verschiedenen Vorzeichen zu addiren, so subtrahirt man die Summe der negativen von der Summe der positiven oder umgekehrt: also $a+b-c-d-e=(a+b)-(c+d+e)$.

Bew.

$$a+b-c-d-e+c+d+e=a+b$$
$$(a+b)-(c+d+e)+(c+d+e)=a+b$$

$$a+b-c-d-e+c+d+e=(a+b)-(c+d+e)+(c+d+e)$$
$$c+d+e=+(c+d+e)$$

$$a+b-c-d-e=(a+b)-(c+d+e).$$

Zus. Jedes Polynom ist eine Summe von positiven und negativen Zahlen, also $a + b - c - d + e = a + (+b) + (-c) + (-d) + (+e)$.

2. Aufg. Gleichnamige und ungleichnamige Zahlen mit verschiedenen Vorzeichen zu addiren.

Aufl. Man addire die positiven, dann die negativen Zahlen, ziehe die kleinere Summe von der größeren ab und gebe der Differenz das Vorzeichen der größeren Summe (8. und 9. Lehrs.). z. B.

$$\begin{array}{r} 5a + 2b - 6d - 18f \\ 7a - 5b + 10d - f \\ 15a - 9b - 11d + 7f \\ -a + 20b - 18d + 2f \\ \hline 26a + 8b - 25d - 10f \end{array}$$

Ausrechn. $\begin{array}{r} +27a \\ -a \\ \hline +26a \end{array} \Bigg| \begin{array}{r} +22b \\ -14b \\ \hline +8b \end{array} \Bigg| \begin{array}{r} -35d \\ +10d \\ \hline -25d \end{array} \Bigg| \begin{array}{r} -19f \\ +9f \\ \hline -10f \end{array}$

Setzt man für die Buchstaben bestimmte Zahlen, als $a = 5$, $b = 3/4$, $d = 2$ und $f = 1$, so ist die Summe $= 130 + 6 - 50 - 10 = 76$.

(Aufg. Smlg. § 2. 21—23, 25—37).

10 Lehrs. Das Subtrahiren wird in ein Addiren verwandelt, indem man das Vorzeichen des Subtrahenden ins entgegengesetzte verwandelt.

Bew. Nach Lehrs. 6 ist $\begin{array}{l} a - (-c) = a + c \\ a + (+c) = a + c \\ \hline \end{array}$

folglich 1) $a - (-c) = a + (+c)$

Ebenso ist $\begin{array}{l} a - (+c) = a - c \\ a + (-c) = a - c \\ \hline \end{array}$

folglich 2) $a - (+c) = a + (-c)$.

3 Aufg. Gleichnamige und ungleichnamige Zahlen mit verschiedenen Vorzeichen zu subtrahiren.

Aufl. Man verwandelt das Subtrahiren in ein Addiren und die Vorzeichen des Subtrahenden in die entgegengesetzten. z. B.

1) $(18a - 2/3\,b + 9c - d) - (27a - 4b - 16c + 8d - 2f)$ schreibe man:

$$\begin{array}{r} 18a - 2/3\,b + 9c - d \\ \mp(\pm 27a \mp 4b \mp 16c \pm 8d \mp 2f) \\ \hline -9a + 3\,1/3\,b + 25c - 9d + 2f \end{array}$$

(Aufg. Sammlg. § 3. 19—25, 29—43.)

2) $(2a + 5(b + c) - 4/5\,d - 2fg) - (8a - 2(b + c) + 8fg) - (-28a + 16(b + c) - 1/2\,d - 18fg)$

schreibe man;

$$\begin{array}{l}
\quad\; 2a + 5(b + c) - \tfrac{4}{5}d - 2fg \\
\mp(\pm 8a \mp 2(b + c) \qquad \pm 8fg) \\
\mp(\mp 28a \pm 16(b + c) \mp \tfrac{1}{2}d \mp 18fg) \\
\hline
22a - 9(b + c) - \tfrac{3}{10}d + 8fg = 10 - 42 - 1\tfrac{1}{2} + 192 = 158\tfrac{1}{2},
\end{array}$$

wenn $a = \frac{5}{11}$, $b = \frac{2}{3}$, $c = 4$, $d = 5$, $f = 3$ und $g = 8$ ist.

Ausrechnung.
$$\begin{array}{r|r|r}
+30a & -16(b + c) & +18fg \\
-\ \ 8a & +\ \ 7(b + c) & -10fg \\
\hline
+22a & -\ \ 9(b + c) & +\ \ 8fg
\end{array}$$

3) $(-2{,}3a - 0{,}34b + 5c + 11d) - (8a + b - 4{,}2c - 8\tfrac{1}{2}d - 5f) + (27a + 3{,}4b - 9{,}2c - 34d + 2f)$

schreibe man:

$$\begin{array}{l}
\quad -2{,}3a - 0{,}34b + 5c + 11d \\
\mp(\pm 8a \quad \pm \quad b \mp 4{,}2c \mp 8\tfrac{1}{2}d \mp 5f) \\
\qquad 27a + 3{,}4b - 9{,}2c - 34d + 2f \\
\hline
\quad 16{,}7a + 2{,}06b - 14\tfrac{1}{2}d + 7f
\end{array}$$

Ausrechnung
$$\begin{array}{r|r|r}
+27a & +3{,}4b & -34d \\
-10{,}3a & -1{,}34b & +19\tfrac{1}{2}d \\
\hline
+16{,}7a & +2{,}06b & -14\tfrac{1}{2}d
\end{array}$$

$= 41{,}75 + 10{,}3 - 58 + 2{,}1 = -3{,}85$, wenn $a = 2{,}5$, $b = 5$, $c = 2$, $d = 4$ und $f = 0{,}3$ ist.

(Aufg. Samml. § 3. 44—51).

§ 30. Ungleichungen.

11. Lehrs. Gleiches zu Ungleichem oder umgekehrt addirt giebt Ungleiches mit demselben Ungleichheitszeichen.

$$\begin{array}{ll}
1)\ \left.\begin{array}{r} a < b \\ c = d \end{array}\right\} \text{Vdg.} & \qquad 2)\ \begin{array}{r} c = d \\ a < b \end{array} \\
\hline
a + c < b + d \ \text{Vhptg.} & \qquad c + a < d + b
\end{array}$$

Bew. Es sei x die Zahl, welche zu a addirt werden muß, um b zu erhalten, so hat man

$$\begin{array}{l}
a + x = b \\
\quad\;\; c = d \\
\hline
a + x + c = b + d \ (\text{Lehrs. } 2). \\
a + c < a + x + c \ (\text{Grds. } 4) \\
\hline
a + c < b + d \ (\text{Grds. } 2)
\end{array}$$

Ebenso 2).

Zus. Ungleiches zu Ungleichem mit demselben Ungleichheitszeichen addirt giebt Ungleiches mit eben demselben Ungleichheitszeichen.

$$\begin{array}{c} a < b \\ c < d \\ \hline a + c < b + d \end{array}$$

(Aufg. Sammlg. § 2. 15).

12. Lehrs. Gleiches von Ungleichem subtrahirt giebt Ungleiches mit demselben Ungleichheitszeichen.

$$\begin{array}{c} a < b \\ c = d \\ \hline a - c < b - d \end{array}$$

Bew.
$$\begin{array}{c} a + x = b \\ c = d \\ \hline (a + x) - c = b - d. \end{array}$$

Nun ist $a - c < (a - c) + x$, folglich $a - c < b - d$.

13. Lehrs. Ungleiches von Gleichem subtrahirt giebt Ungleiches mit dem entgegengesetzten Ungleichheitszeichen.

$$\begin{array}{c} a = b \\ c > d \\ \hline a - c < b - d. \end{array}$$

Bew. Es sei x die Größe, die von c weggenommen werden muß, damit d erhalten werde, so hat man

$$\begin{array}{c} a = b \\ c - x = d \\ \hline \end{array}$$

$a - (c - x) = b - d$ oder $a - c + x = b - d$, folglich $a - c < b - d$.

14. Lehrs. Ungleiches von Ungleichem mit entgegengesetztem Ungleichheitszeichen subtrahirt giebt Ungleiches mit dem ersten Ungleichheitszeichen.

$$\begin{array}{c} a < b \\ c > d \\ \hline a - c < b - d. \end{array}$$

Bew.
$$\begin{array}{c} a + x = b \\ c > d \\ \hline \hline a + x - c < b - d \quad \text{(Lehrs. 13.)} \\ a - c < a + x - c \\ \hline a - c < b - d. \quad \text{(Grds. 5.)} \end{array}$$

(Aufg. Samml. § 2. 15. § 3. 27.)

Zweiter Abschnitt.

Von den Produkten und Quotienten.

Anmerkung. Der Multiplicand eines Produkts kann auch eine benannte Zahl sein, in welchem Falle auch das Produkt dem Multiplicanden gleichartig ist; der Multiplicator ist aber jederzeit unbenannt. Der Dividend kann benannt sein; ist der Divisor auch benannt, so muß er dem Dividenden gleichartig sein, der Quotient ist dann eine unbenannte Zahl und die Division ist ein Messen; sie stellt die Frage, wie oft der Divisor im Dividenden enthalten sei. Man nennt eine solche Quotientenform ein Verhältniß (a Rbl. : b Rbl.); der Dividend ist das erste Glied und der Divisor das zweite. Ist der Divisor unbenannt, so ist die Division ein Theilen; man fragt nach dem Theile, welcher so oftmal genommen, als der Divisor angiebt, den Dividend hervorbringt; der Quotient ist dem Dividenden gleichartig. Diese Quotientenform heißt ein Bruch; der Dividend heißt Zähler und der Divisor Nenner des Bruches $\left(\frac{a \text{ Rbl.}}{b}\right)$.

15. Lehrs. Gleiches mit Gleichem multiplicirt oder durch Gleiches dividirt giebt Gleiches.

$$a = b$$
$$c = d$$

$$1)\ ac = bd \text{ und } 2)\ \frac{a}{c} = \frac{b}{d}.$$

Bew. Da $ac = ac$ oder $\frac{a}{c} = \frac{a}{c}$, so ist, wenn man auf der rechten Seite für $a = b$ und $c = d$ setzt 1) $ac = bd$ und 2) $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$

16. Lehrs. Hat der Multiplicator mit dem Multiplicanden gleiche Vorzeichen (+ mal + oder — mal —), so ist das Produkt positiv, sind aber die Vorzeichen ungleich (+ mal — oder — mal +), so ist das Produkt negativ.

$$\begin{aligned}
\text{I)}\quad & +a\,.+b = +ab \\
\text{II)}\quad & +a\,.-b = -ab \\
\text{III)}\quad & -a\,.+b = -ab \\
\text{IV)}\quad & -a\,.-b = +ab.
\end{aligned}$$

Bew. I. $+a\,.+b$ heißt: man suche eine neue Zahl, die aus b ebenso entsteht, wie a aus der Einheit entstanden ist.

Nun ist $+a = \overset{1}{1} + \overset{2}{1} + \overset{3}{1} \ldots\ldots + \overset{a}{1}$

folglich ist $+a\,.+b = \overset{1}{b} + \overset{2}{b} + \overset{3}{b} \ldots\ldots\ldots + \overset{a}{b} = ab = +ab.$

II. $+a\,.-b = (-\overset{1}{b}) + (-\overset{2}{b}) + (-\overset{3}{b}) \ldots + (-\overset{a}{b}) = -(\overset{1}{b} + \overset{2}{b} + \overset{3}{b} \ldots + \overset{a}{b})$
$= -ab.$

III. Da $-a = -(+a) = -(\overset{1}{1} + \overset{2}{1} + \overset{3}{1} \ldots + \overset{a}{1})$, so ist

$$-a\,.+b = -(+a)\,.+b = -(\overset{1}{b} + \overset{2}{b} + \overset{3}{b} \ldots\ \overset{a}{b}) = -ab.$$

IV. Da $-a = -(+a) = -(\overset{1}{1} + \overset{2}{1} + \overset{3}{1}, \ldots + \overset{a}{1})$, so ist

$$-a\,.-b = -[(-\overset{1}{b}) + (-\overset{2}{b}) + (-\overset{3}{b}) \ldots + (-\overset{a}{b})]$$

$$= -[-(\overset{1}{b} + \overset{2}{b} + \overset{3}{b} \ldots + \overset{a}{b})] = -(-ab) = +ab$$

(4. Lehrs. VII, Zus. 6).

17. Lehrs. In jedem Produkte kann man die beiden Faktoren mit einander vertauschen. $ab = ba$.

Bew. $$ab = \overset{1}{b} + \overset{2}{b} + \overset{3}{b} \ldots + \overset{a}{b} = \left.\begin{array}{l} \overset{1}{1} + \overset{2}{1} + \overset{3}{1} \ldots + \overset{b}{1} \\ + \overset{1}{1} + \overset{2}{1} + \overset{3}{1} \ldots + \overset{b}{1} \\ \vdots \\ + \overset{1}{1} + \overset{2}{1} + \overset{3}{1} \ldots + \overset{b}{1} \end{array}\right\}\text{ a Reihen.}$$
$$= \overset{1}{a} + \overset{2}{a} + \overset{3}{a} \ldots + \overset{b}{a} = ba;$$

folglich $ab = ba$.

18. Lehrs. Ein Produkt multiplicirt man mit einer Zahl, indem man einen Faktor desselben mit dieser Zahl multiplicirt.

1) $c\,.ab = a\,.cb$ oder 2) $c\,.ab = b\,.ca$.

Bew. 1) $c\,.\,ab = \overset{1}{ab} + \overset{2}{ab} + \overset{3}{ab} \ldots \overset{c}{ab}$

$$\left.\begin{array}{l} = \overset{1}{b} + \overset{2}{b} + \overset{3}{b} \ldots + \overset{a}{b} \\ + \overset{1}{b} + \overset{2}{b} + \overset{3}{b} \ldots\ldots + \overset{a}{b} \\ \vdots \\ + \overset{1}{b} + \overset{2}{b} + \overset{3}{b} \ldots\ldots + \overset{a}{b} \end{array}\right\} c \text{ Reihen}$$

$$= \overset{1}{cb} + \overset{2}{cb} + \overset{3}{cb} \ldots\ldots + \overset{a}{cb} = a\,.\,cb = a\,.\,bc;$$

folglich $c\,.\,ab = a\,.\,cb$.

2) $c\,.\,ab = c\,.\,ba = \overset{1}{ba} + \overset{2}{ba} \ldots\ldots + \overset{c}{ba}$

$$\left.\begin{array}{l} = \overset{1}{a} + \overset{2}{a} \ldots\ldots + \overset{b}{a} \\ + \overset{1}{a} + \overset{2}{a} \ldots\ldots + \overset{b}{a} \\ \vdots \\ + \overset{1}{a} + \overset{2}{a} \ldots\ldots + \overset{b}{a} \end{array}\right\} c \text{ Reihen}$$

$$= \overset{1}{ca} + \overset{2}{ca} \ldots\ldots + \overset{b}{ca} = b\,.\,ca = b\,.\,ac;$$

folglich $c\,.\,ab = b\,.\,ac$.

1. Zus. In einem Produkt von mehreren Zahlen ist die Ordnung der Faktoren willkürlich. $abc = acb = bac = bca = cab = cba$.

2. Zus. Zwei oder mehrere Produkte multiplicirt man mit einander, indem man ihre Faktoren der Reihe nach mit einander multiplicirt. $ab\,.\,cde = abcde$.

3. Zus. Wenn die Anzahl der negativen Faktoren eine gerade $(2n)$ ist, so ist das Produkt positiv, hingegen negativ, wenn die Anzahl eine ungerade $(2n + 1)$ ist.

19. Lehrs. Eine Summe multiplicirt man mit einer Zahl, indem man die einzelnen Summanden mit dieser Zahl multiplicirt und die Theilprodukte addirt. $a(b + c) = ab + ac$.

Bew. $a(b + c) = (b \overset{1}{+} c) + (b \overset{2}{+} c) \ldots\ldots + (b \overset{a}{+} c)$

$$= \overset{1}{b} + \overset{2}{b} \ldots + \overset{a}{b} + \overset{1}{c} + \overset{2}{c} \ldots + \overset{a}{c} = ab + ac.$$

Zus. $a(b + c + d \ldots) = ab + ac + ad \ldots$

20. Lehrs. Eine Differenz multiplicirt man mit einer Zahl, indem man jedes Glied derselben mit dieser Zahl multiplicirt und von dem ersten Theilprodukte das zweite subtrahirt. $a(b - c) = ab - ac$.

Bew. $a(b-c) = (b \overset{1}{-} c) + (b \overset{2}{-} c) \ldots\ldots + (b \overset{a}{-} c)$

$$= (\overset{1}{b} + \overset{2}{b} \ldots\ldots + \overset{a}{b}) - (\overset{1}{c} + \overset{2}{c} \ldots\ldots + \overset{a}{c}) = ab - ac.$$

1. Zus. $a(b - c - d \ldots\ldots) = ab - ac - ad \ldots\ldots$

2. Zus. $a(b \pm c) = (b \pm c)\, a$

3. Zus. $ab \pm ac \pm ad \ldots\ldots = a(b \pm c \pm d \ldots\ldots)$, d. h. ein Polynom von Produkten, die einen Faktor gemein haben, kann man als ein Produkt darstellen.

4. Zus. Ist $b = c$ in $(b - c)\, a = a(b - c) = ab - ac$, so ist $0 \,.\, a = a \,.\, 0 = 0$.

5. Zus. Ist $b = 0$ in $a(b - c) = (b - c)\, a = ab - ac$, so ist $a \,.\, -c = -c \,.\, a = -a \,.\, c$.

21. Lehrs. Summen multiplicirt man mit einander, indem man die Summanden der einen mit denen der andern multiplicirt und die Theilprodukte addirt. $(a + b) \,.\, (c + d) = ac + bc + ad + bd$.

Bew. Betrachtet man $(a + b)$ als eine Zahl, so ist $(a + b)(c + d) = (a + b)\, c + (a + b)\, d = ac + bc + ad + bd$ (19. Lehrs.)

Zus. Ist a und c Null in $(a + b)(c + d) = ac + bc + ad + bd$, so ist $+b \,.\, +d = +bd$.

22. Lehrs. Eine Summe multiplicirt man mit einer Differenz, indem man die Summe mit den beiden Zahlen der Differenz multiplicirt und die Produkte von einander subtrahirt.

$$(a + b)(c - d) = ac + bc - (ad + bd).$$

Bew. Betrachtet man $(a + b)$ als eine Zahl, so ist $(a + b)(c - d) = (a + b)\, c - (a + b)\, d = ac + bc - (ad + bd) = ac + bc - ad - bd$.

1. Zus. $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$, d. h. das Produkt aus der Summe und dem Unterschiede zweier Zahlen ist gleich dem Unterschiede der Quadrate beider Zahlen, oder umgekehrt.

2. Zus. Ist a und c Null in $(a + b)(c - d) = ac + bc - ad - bd$, so ist $(+b) \,.\, (-d) = -bd$.

3. Zus. $(c - d)(a + b) = (c - d)\, a + (c - d)\, b = ca - da + bc - bd$.

4. Zus. Ist c und a Null in Zus. 3, so ist $(-d) \,.\, (+b) = -bd$.

23. Lehrs. Eine Differenz multiplicirt man mit einer Differenz, indem man die eine Differenz mit den Zahlen der andern Differenz multiplicirt und die Produkte von einander subtrahirt.

$$(a - b)(c - d) = (ac - bc) - (ad - bd).$$

Bew. Betrachtet man $(a - b)$ als eine Zahl, so ist $(a - b)(c - d) = (a - b)\, c - (a - b)\, d = (ac - bc) - (ad - bd) = ac - bc - ad + bd$.

Zus. Ist a und c Null in Lehrs. 23, so ist $(-b).(-d) = +bd$.

4. Aufg. Ein Monom mit einem Monom zu multipliciren.

Aufl. Man multiplicire die Coefficienten und schreibe die Buchstaben neben einander. (18. Lehrs. Zus. 2.) (Aufg. Smlg. § 4. 4, 6, 7, 23, 24.)

5. Aufg. Ein Polynom mit einem Monom zu multipliciren.

Aufl. Man multiplicire die einzelnen Monome des Polynoms mit dem einen Monom und addire die einzelnen Theilprodukte, z. B.

1) $(15ab - 2,3bc) 5d = 75abd - 11,5bcd.$

2) $(5ab - 8,3dc + {}^{15}/_{16}(x+y) - 0,04f) . 11ad = 55a^2bd - 91,3acd^2 + 10^5/_{16} ad(x+y) - 0,44adf.$ (Augf. Smlg. § 4. 8, 9, 19, 25, 26.)

6. Aufg. Ein Polynom mit einem Polynom zu multipliciren.

Aufl. Man multiplicire das eine Polynom mit den einzelnen Monomen des andern Polynom, schreibe die gleichnamigen Zahlen unter einander und addire (21. Lehrs.). z. B.

1) $(23ab - 7c)(15ab + 31c)$

$$
\begin{array}{l}
= 345a^2b^2 - 105abc \\
\qquad\qquad + 713abc - 217c^2 \\
\hline
345a^2b^2 + 608abc - 217c^2
\end{array}
$$

2) $^2/_3 ab - 5cd + 8ad) . (^4/_5 ab - 3cd - 6ad)$

$$
\begin{array}{l}
= {}^8/_{15}a^2b^2 - 4abcd + {}^{32}/_5 a^2bd \\
\quad - 2abcd \qquad + 15c^2d^2 - 24acd^2 \\
\qquad - 4a^2bd \qquad + 30acd^2 - 48a^2d^2 \\
\hline
{}^8/_{15}a^2b^2 - 6abcd + {}^{12}/_{15}a^2bd + 15c^2d^2 + 6acd^2 - 48a^2d^2
\end{array}
$$

(Aufg. Sammlg. § 4. 13, 15—17, 27—61.)

7. Aufg. Ein Polynom von Produkten, die einen Faktor gemein haben, als ein Produkt darzustellen.

Aufl. Man hebe den gemeinschaftlichen Faktor aus und betrachte ihn als den einen Faktor, die übrigen Monome schließe man in eine Klammer, diese bilden dann den anderen Faktor (20. Lehrs.). z. B.

1) Der gemeinschaftliche Faktor ist ein Monom:

$$16a^2bc - 12adc + 10acf = 2ac(8ab - 6d + 5f)$$

2) Der gemeinschaftliche Faktor ist ein Polynom:

a) $15ab + 6bd - 40ac - 16cd = 3b(5a + 2d) - 8c(5a + 2d)$;
$= (5a + 2d)(3b - 8c)$.

b) $72abdg - 12bcg + 20bfg^2 - 126adx + 21cx - 35fgx$
$= 4bg(18ad - 3c + 5fg) - 7x(18ad - 3c + 5fg) = (18ad - 3c + 5fg)$
$(4bg - 7x)$. (Aufg. Smlg. § 5. 1—14).

8. Aufg. Den Unterschied der Quadrate zweier Zahlen in Faktoren zu zerlegen.

Aufl. Die Summe beider Zahlen ist der eine Faktor und der Unterschied derselben der andere Faktor (22. Lehrs. Zus. 1). z. B.

1) $25\,a^2 - 64\,b^2 = (5\,a + 8\,b)\,(5\,a - 8\,b)$.

2) $32\,a^2\,b^2\,x - 162\,c^2\,d^2\,x = 2\,x\,(16\,a^2\,b^2 - 81\,c^2\,d^2)$
$= 2\,x\,(4\,ab + 9\,cd)\,(4\,ab - 9\,cd)$. (Aufg. Smlg. § 5. 15—19).

9. Aufg. Ein Polynom $x\,a^2 \pm yab \pm zb^2$, worin y die Summe oder Differenz der Produkte zweier Faktoren ist, aus welchen x und y bestehen, in Faktoren zu zerlegen.

Aufl. Es sei $x = \alpha\gamma$ und $z = \beta\delta$, so sind folgende Formeln möglich:

1) $(\alpha\,a + \beta\,b)\,(\gamma\,a + \delta\,b) = \alpha\,\gamma\,a^2 + (\beta\,\gamma + \alpha\,\delta)\,a\,b + \beta\,\delta\,b^2$

2) $(\alpha\,a + \beta\,b)\,(\gamma\,a - \delta\,b) = \alpha\,\gamma\,a^2 + (\beta\,\gamma - \alpha\,\delta)\,a\,b - \beta\,\delta\,b^2$

3) $(\alpha\,a - \beta\,b)\,(\gamma\,a + \delta\,b) = \alpha\,\gamma\,a^2 - (\beta\,\gamma - \alpha\,\delta)\,a\,b - \beta\,\delta\,b^2$

4) $(\alpha\,a - \beta\,b)\,(\gamma\,a - \delta\,b) = \alpha\,\gamma\,a^2 - (\beta\,\gamma + \alpha\,\delta)\,a\,b + \beta\,\delta\,b^2$.

In 2) ist $(\beta\,\gamma - \alpha\,\delta)$ minus, wenn $\alpha\,\delta > \beta\,\gamma$, ebenso ist in 3) $-(\beta\,\gamma - \alpha\,\delta)$ plus, wenn $\alpha\,\delta > \beta\,\gamma$.

Hiernach läßt sich leicht das Polynom in 2 Faktore zerlegen. z. B.

1) $14\,a^2 + 41\,a\,b + 15\,b^2$

$$\left.\begin{array}{l}14 = 2\,.\,7\\ 15 = 3\,.\,5\end{array}\right\}\ 2\,.\,3 + 7\,.\,5 = 41,\ \text{folglich} = (2\,a + 5\,b)\,(7\,a + 3\,b).$$

2) $5\,a^2 + 7\,a\,b - 6\,b^2 = (5\,a - 3\,b)\,(a + 2\,b)$.

$$\left.\begin{array}{l}5 = 1\,.\,5\\ 6 = 2\,.\,3\end{array}\right\}\ 5\,.\,2 - 1\,.\,3 = 7.$$

3) $6\,a^2 - 16\,ab - 6\,b^2 = (2\,a - 6\,b)\,(3\,a + b)$.

$$\left.\begin{array}{l}6 = 2\,.\,3\\ 6 = 1\,.\,6\end{array}\right\}\ 1\,.\,2 - 3\,.\,6 = -16.$$

4) $15\,a^2 - 61\,ab + 22\,b^2 = (3\,a - 11\,b)\,(5\,a - 2\,b)$.

$$\left.\begin{array}{l}15 = 3\,.\,5\\ 22 = 2\,.\,11\end{array}\right\}\ -3\,.\,2 - 5\,.\,11 = -61.$$

(Aufg. Sammlg. § 29. 13—22.)

24. Lehrs. Zahlen mit gleichen Vorzeichen geben einen positiven, mit ungleichen Vorzeichen einen negativen Quotienten.

1) $\dfrac{+a}{+b} = +\dfrac{a}{b}$, 2) $\dfrac{-a}{-b} = +\dfrac{a}{b}$, 3) $\dfrac{-a}{+b} = -\dfrac{a}{b}$

und 4) $\dfrac{+a}{-b} = -\dfrac{a}{b}$.

Bew. Weil 1) $+\frac{a}{b}.+b=+a$, 2) $+\frac{a}{b}.-b=-a$,

3) $-\frac{a}{b}.+b=-a$ und 4) $-\frac{a}{b}.-b=+a$.

(16. Lehrs. und § 18. Folg. 2.)

25. Lehrs. Eine Summe oder Differenz dividirt man durch eine Zahl, indem man ihre Glieder einzeln durch diese Zahl dividirt und die Theilquotienten addirt oder subtrahirt.

$$\frac{a \pm b}{c}=\frac{a}{c} \pm \frac{b}{c}.$$

Bew. $a=\frac{a}{c}.c$ und $b=\frac{b}{c}.c$, also $a \pm b=\frac{a}{c}.c \pm \frac{b}{c}.c$ $=\left(\frac{a}{c} \pm \frac{b}{c}\right)c$, folglich $\frac{a \pm b}{c}=\frac{a}{c} \pm \frac{b}{c}$.

1. Zus. $\frac{a \pm b \pm d \ldots\ldots}{c}=\frac{a}{c} \pm \frac{b}{c} \pm \frac{d}{c} \ldots\ldots$, d. h. ein Polynom dividirt man durch ein Monom, indem man seine Glieder einzeln dividirt und die Theilquotienten addirt oder subtrahirt.

2. Zus. $\frac{a+b}{2}+\frac{a-b}{2}=a$ und $\frac{a+b}{2}-\frac{a-b}{2}=b$, d. h. die halbe Summe zweier Zahlen, vermehrt um ihre halbe Differenz, giebt die größere, und um ihre halbe Differenz vermindert, die kleinere der beiden Zahlen.

26. Lehrs. Ein Produkt dividirt man durch eine Zahl, indem man einen Faktor dividirt und den Quotienten mit dem anderen Faktor multiplicirt. $\frac{ab}{c}=\frac{a}{c}.b=\frac{b}{c}.a$.

Bew. 1) $a=\frac{a}{c}.c$ und $ab=\frac{a}{c}.c.b$, folglich $\frac{ab}{c}=\frac{a}{c}.b=b.\frac{a}{c}$.

2) $b=\frac{b}{c}.c$ und $ba=\frac{b}{c}.c.a$, folglich $\frac{ba}{c}=\frac{b}{c}.a=a.\frac{b}{c}$.

Zus. Die Ordnung, in welcher man mit ein und denselben Zahlen multiplicirt oder dividirt, ist willkührlich.

27. Lehrs. Eine Zahl wird durch ein Produkt dividirt, indem man dieselbe durch seine Faktoren nach einander dividirt.

$$\frac{a}{bc}=\frac{a}{b}:c.$$

Bew. $\frac{a}{bc}.bc=a$ und $\frac{a}{bc}.b=\frac{a}{c}$, folglich $\frac{a}{bc}=\frac{a}{c}:b$.

Zus. $\frac{a}{b} = \frac{a^m}{b^m}$ oder $\frac{a^m}{b^m} = \frac{a}{b}$, d. h. der Werth eines Quotienten (Bruches) ändert sich nicht, wenn man seine beiden Glieder mit derselben Zahl multiplicirt oder dividirt.

10. Aufg. Ganze Zahlen durch ganze Zahlen zu dividiren.

Aufl. 1) Monome durch Monome:

a) $35\, abg : 7af = \frac{35abg}{7af} = \frac{5bg}{f}$.

b) $-141\, x\, y : 21\, x\, z = -\frac{141xy}{21xz} = -\frac{47y}{7z}$.

2) Polynome durch Monome. (25. Lehrs. Zus. 1.)

a) $(140\, a^2 bc - 84\, ac^2 d - 420\, acd^2 f + 4\, a\, c) : 4\, ac$

$= \frac{140a^2bc}{4ac} - \frac{84ac^2d}{4ac} - \frac{420acdf}{4ac} + \frac{4ac}{4ac} = 35ab - 21cd - 105d^2f + 1.$

b) $\frac{2}{3} ab \left| \begin{array}{l} \frac{1}{2}abxy - \frac{5}{9}abzt + \frac{20}{33}abxz \\ \frac{1}{2}abxy - \frac{5}{9}abzt + \frac{20}{33}abxz \end{array} \right| = \frac{3}{4}xy - \frac{5}{6}zt + \frac{10}{11}xz.$

3) Polynom durch Polynom.

Man ordne beide Polynome nach demselben Gesetze und dividire mit dem ersten Gliede des Divisors in das erste des Dividenden, multiplicire mit dem erhaltenen Quotienten den ganzen Divisor und subtrahire dies Produkt vom Dividenden. Hierauf dividire man wieder mit dem ersten Gliede des Divisors in das erste Glied des geordneten Restes und verfahre überhaupt mit diesem und mit allen folgenden Resten wie vorher mit dem Dividenden, bis alle Glieder des Dividenden heruntergenommen und gleichnamige von ihnen subtrahirt sind. Ist der letzte Rest Null, so ist die Summe der erhaltenen Theilquotienten der gesuchte Quotient, im entgegengesetzten Falle kann man entweder den Rest als Zähler eines Bruches, dessen Nenner der Divisor ist, zum Quotienten hinzu addiren oder die Rechnung fortsetzen. Man erhält alsdann immer eine endlose Reihe von Gliedern, welche nach einem bestimmten Gesetze gebildet sind.

Bew. Die beiden Polynome seien A und B und $A > B$, so ist für jedes von der Null verschiedene B, $\frac{A}{B} = q_1 + \frac{A - Bq_1}{B}$, sei $A - Bq_1 = C$, so ist $\frac{C}{B} = q_2 + \frac{C - Bq_2}{B}$ u. s. w., folglich $\frac{A}{B} = q_1 + q_2 + q_3 \ldots + q_n + \frac{N - Bq_n}{B}$. Ist $N - Bq_n = 0$, so sagt man: die Division geht auf. z. B.

1) $7f + 3g \,|\, 14af - 21bf + 7cf + 6ag - 9bg + 3cg \,|\, = 2a - 3b + c$

$$14af \qquad + 6ag$$
$$\overline{\quad - 21bf \quad}$$
$$- 21bf \qquad - 9bg$$
$$\overline{\quad + 7cf \quad}$$
$$7cf \qquad + 3cg$$

2) $5g - 8h - 11k \,|\, 25g^2 - 64h^2 - 176hk - 121k^2 \,|\, = 5g + 8h + 11k$

$$25g^2 \qquad \underline{- 40gh - 55gk}$$
$$\overline{40gh + 55gk - 64h^2 - 176hk}$$
$$40gh \qquad - 64h^2 - 88hk$$
$$\overline{55gk \qquad - 88hk}$$
$$55gk \qquad - 88hk - 121k^2$$

In diesem Beispiele fehlen im Dividenden die Glieder gh, gk, weil die Coefficienten Null sind, daher zieht man $-40gh - 55gk$ von Null ab.

3) $\frac{4}{5}ab + \frac{8}{15}bc - d \,|\, \frac{3}{5}a^2b^2 - \frac{19}{20}abd - \frac{4}{15}b^2c^2 + \frac{11}{30}bcd + \frac{1}{4}d^2 \,|\, = \frac{3}{4}ab - \frac{1}{2}bc - \frac{1}{4}d$

$$\frac{3}{5}a^2b^2 - \frac{3}{4}abd \qquad \underline{+ \frac{2}{5}ab^2c}$$
$$\overline{- \frac{2}{5}ab^2c \quad - \frac{1}{5}abd}$$
$$- \frac{2}{5}ab^2c \qquad - \frac{4}{15}b^2c^2 + \frac{1}{2}bcd$$
$$\overline{- \frac{1}{5}abd \qquad - \frac{2}{15}bcd}$$
$$- \frac{1}{5}abd \qquad - \frac{2}{15}bcd + \frac{1}{4}d^2.$$

Geht die Division nicht auf, d. h. ist $N - Bq_n$ nicht Null, so muß zu den Theilquotienten der Rest hinzugefügt werden. z. B.

$$\frac{1}{1-b} = 1 - b \,\Big|\, \frac{1}{1-b} \,\Big|\, = 1 + b + b^2 \ldots + b^{n-1} + \frac{b^n}{1-b}$$

$$b$$
$$b - b^2$$
$$\overline{\quad b^2 \quad}$$
$$b^2 - b^3$$
$$\overline{\quad b^3 \text{ u. s. w.}}$$

Ist $b < 1$, so wird der Rest sehr klein und man kann ihn, wenn n sehr groß wird, weglassen; solche Reihen heißen convergente. Ist hingegen $b > 1$, so wird der Rest, wenn n wächst, immer größer, dann darf er nicht weggelassen werden; solche Reihen heißen divergente. Ist $b = 1$, so ist die Reihe unendlich groß.

(Aufg. Sammlg. § 6. 23—28, 31—52.)

§ 31. Von dem gemeinschaftlichen Theiler oder dem gemeinschaftlichen Maaße zweier Zahlen.

Erklärung. Eine Zahl, welche in einer andern ein oder mehrere Mal ohne Rest enthalten ist, heißt ein Theiler (Maaß) dieser Zahl, und diese letztere heißt ein Vielfaches der ersteren. Eine Zahl, welche durch keine andere Zahl als sich selbst und Eins ohne Rest theilbar ist, heißt eine einfache Zahl oder Primzahl; die anderen Zahlen heißen zusammengesetzte Zahlen. Die Vielfachen von Zwei heißen gerade Zahlen und lassen sich durch die Form $2n$ ausdrücken, die andern ungerade Zahlen und haben die Form $2n \pm 1$, wenn unter n irgend eine ganze Zahl verstanden wird.

Werden die Glieder eines Quotienten (Zähler und Nenner eines Bruches) durch einen gemeinschaftlichen Faktor dividirt, so heißt das „den Quotienten (Bruch) heben." Die Zahl, durch welche gehoben wird, heißt der gemeinschaftliche Theiler oder das gemeinschaftliche Maaß (wenn beide Zahlen benannt sind).

Zwei Zahlen, welche keinen gemeinschaftlichen Theiler außer Eins haben, nennt man relative Primzahlen oder Primzahlen unter einander.

28. Lehrs. Der Theiler (das Maaß) einer Zahl ist auch ein Theiler jedes Vielfachen dieser Zahl.

Bew. Es sei a durch m theilbar, so ist $\frac{a}{m}$ eine ganze Zahl $= \alpha$, also $a = m\alpha$ und $ab = m\alpha b$; nun ist $m\alpha b$ durch m theilbar, folglich auch ab.

29. Lehrs. Der Theiler (das Maaß) zweier Zahlen ist auch ein Theiler ihrer Summe oder ihrer Differenz, sowie der ihrer Vielfachen.

Bew. Es werden a und b von n genau gemessen, so muß, weil $\frac{a}{n}$ und $\frac{b}{n}$ ganze Zahlen sind, und die Summe oder Differenz zweier ganzen Zahlen wieder eine ganze Zahl ist, $\frac{a \pm b}{n}$ eine ganze Zahl sein. Ebenso sind $\frac{ax}{n}$ und $\frac{by}{n}$ ganze Zahlen, folglich auch $\frac{ax \pm by}{n}$ eine ganze Zahl.

30. Lehrs. Wenn bei der Division zweier Zahlen ein Rest bleibt, so ist jeder gemeinschaftliche Theiler des Dividenden und Divisors auch ein Theiler des Restes.

Bew. Es sei $a = bq + r$ (a sei der Dividend, b der Divisor, q der Quotient und r der Rest); ist c ein Theiler von a und b, so ist auch c ein Theiler von bq (28. Lehrs.), also auch ein Theiler von $a - bq = r$ (29. Lehrs.).

Zus. Jeder gemeinschaftliche Theiler des Divisors und Restes ist auch ein Theiler des Dividenden. Ist c ein Theiler von b und r, so ist c auch ein Theiler von $bq + r = a$.

11. Aufg. Den größten gemeinschaftlichen Theiler (das größte gemeinschaftliche Maaß) zweier Zahlen A und B zu finden, wenn $B < A$ ist.

Aufl. Geht die kleinere Zahl B in der größern A genau auf, so ist B selbst der größte gemeinschaftliche Theiler beider, z. B. $A = mB$, so ist $\frac{A}{B} = \frac{mB}{B} = m$. Läßt A durch B getheilt einen Rest b, so dividire man mit diesem Reste in den vorigen Divisor B, und wenn wieder ein Rest c bleibt, so dividire man wieder mit diesem Reste in den vorigen Divisor b u. s. w., bis man einen Rest erhält, der in dem vorigen Divisor genau enthalten ist; dieser Rest ist dann der größte gemeinschaftliche Theiler von A und B. Ist dieser letzte Divisor Eins, so sind die Zahlen A und B relative Primzahlen.

Bew. A und B seien keine relative Primzahleu, so findet man den größten gemeinschaftlichen Theiler beider:

$B\|A\| = m$	$A = mB + b = mncp + mc + cp$
$b\|B\| = n$	$B = nb + c = ncp + c$
$c\|b\| = p$	$b = cp.$
o	

Da c in mncp, mc und cp enthalten ist, so ist c auch in A enthalten, ebenso auch in B, also ist c der gemeinschaftliche Theiler; aber c ist auch der größte gemeinschaftliche Theiler für A und B. Denn wäre d noch ein größerer gemeinschaftlicher Theiler für A und B als c, mithin $d > c$ und ist d in A und B genau enthalten, so müßte d auch in mB und auch in b genau enthalten sein wie auch in c, was nicht möglich ist, da $d > c$ ist.

Zus. Der größte gemeinschaftliche Theiler von A und B wird nicht geändert, wenn man A durch eine Zahl, welche mit B keinen gemeinsamen Faktor hat, dividirt oder mit solch' einer Zahl multiplicirt.

Denn es sei $A = ma$ und $B = mb$, wo a und b keinen gemeinschaftlichen Faktor haben, so wird offenbar m noch der größte gemeinschaftliche Theiler bleiben, wenn man a oder b oder auch nur irgend einen ihrer Faktoren wegläßt. Das nämliche findet statt, wenn man A mit einer beliebigen Zahl f, die mit B keinen gemeinsamen Faktor hat, multiplicirt.

z. B.

1) $\dfrac{36a^3c-6a^2bc-90ab^2c}{26a^2cd-120abcd+100b^2cd}=\dfrac{6ac(6a^2-ab-15b^2)}{4cd(9a^2-30ab+25b^2)}$

$$6a^2-ab-15b^2 \,\Big|\, (9a^2-30ab+25b^2).2 \,\Big|\, = 3$$
$$18a^2-60ab+50b^2$$
$$18a^2-3ab-45b^2$$
$$-57ab+95b^2=-19b(3a-5b)$$

Nun dividirt man wieder $3a-5b\,|\,6a^2-ab-15b^2\,|=2a+3b$,

folglich heißt der Bruch $\dfrac{6ac(3a-5b)(2a+3b)}{4cd(3a-5b)(3a-5b)}=\dfrac{3a(2a+3b)}{2d(3a-5b)}$

Der größte gemeinschaftliche Theiler ist $2c(3a-5b)=6ac-10bc$.

2) $\dfrac{4a^4-4a^2b^2+4ab^3-b^4}{6a^4+ba^3b-9a^2b^2-3ab^3+2b^4}=\dfrac{2a^2-2ab+b^2}{3a^2-ab-2b^2}$

$$6a^4+4a^3b-9a^2b^9-3ab^3+2b^4 \,\Big|\, (4a^4-4a^2b^2+4ab^3-b^4).3 \,\Big|\, = 2$$
$$12a^4-12a^2b^2+12ab^3-3b^4$$
$$12a^4-18a^2b^2-6ab^3+4b^4+8a^3b$$
$$-8a^3b+6a^2b^2+18ab^3-7b^4=$$
$$-b(8a^3-6a^2b-18ab^2+7b^5)$$

$$8a^3-6a^2b-18ab^2+7b^3 \,\Big|\, (6a^4+4a^3b-9a^2b^2-3ab^3+2b^4).4 \,\Big|\, = 3a+\tfrac{17}{4}b$$
$$24a^4+16a^3b-36a^2b^2-12ab^3+8b^4$$
$$24a^4-18a^3b-54a^2b^2+21ab^3$$
$$34a^3b+18a^2b^2-33ab^3$$
$$34a^3b-{}^{51}/_2a^2b^2-{}^{153}/_2ab^3+{}^{119}/_4b^4$$
$${}^{87}/_2a^2b^2+{}^{87}/_2ab^3-{}^{87}/_4b^4={}^{87}/_4b^2(2a^2+2ab-b^2)$$
$$2a^2+2ab-b^2\,|\,8a^3-6a^2b-18ab^2+7b^3\,|=4a-7b,$$

folglich ist $2a^2+2ab-b^2$ der größte gemeinschaftliche Theiler.

(Aufg. Smlg. § 7. 4—17. § 29. 28—32, 52—57, 82, 83).

§ 32. Von dem gemeinschaftlichen Dividuus oder dem gemeinschaftlichen Nenner mehrerer Zahlen.

Erklärung. Eine Zahl, in welcher andere Zahlen ohne Rest enthalten sind, heißt das gemeinschaftliche Vielfache oder der gemeinschaftliche Dividuus dieser letzteren, beim Gleichnamigmachen der Brüche gewöhnlich gemeinschaftlicher Nenner (Generalnenner) genannt.

12. Aufg. Den kleinsten gemeinschaftlichen Dividuus mehrerer Zahlen zu finden.

Aufl. Man zerlege die Zahlen in ihre einfachen Faktoren und multiplicire diejenigen Faktoren mit einander, welche die höchsten Exponenten haben; kommen von letzteren mehrere vor, so wird nur einer genommen.

z. B. 1) Man soll zwischen 4ab, $2a^2b$, $5a^2b^2$ und 6abc den kleinsten gemeinschaftlichen Dividuus finden.

$4ab = 2^2.a.b$
$2a^2b = 2.a^2.b$
$5a^2b^2 = 5.a^2.b^2$
$6abc = 3.2.a.b.c$

Nun ist 2 in 2^2, a in a^2, b in b^2 u. s. w. enthalten, daher läßt man 2, a, b und ein a^2 weg, denn wenn 2^2, a^2 in einer Zahl enthalten ist, so ist auch 2, a darin enthalten, folglich bleiben die einfachen Faktoren mit den höchsten Exponenten übrig, als 2^2, 5, 3, a^2, b^2, c. Das Produkt dieser Zahlen giebt den kleinsten gemeinschaftlichen Dividuus $= 60a^2b^2c$.

Ist noch ein kleinerer Dividuus vorhanden, so müßte das gebildete Produkt einen Faktor zu viel haben. Läßt man aber einen Faktor weg, so würde natürlich diejenige Zahl, welche den Faktor öfter enthielte als das gebildete Produkt, in diesem nicht aufgehen. Demnach kann es keinen kleineren Dividuus geben als den gefundenen.

2) Man suche zwischen $3a^2+6ab+3b^2$, $9a^2-9b^2$, $a^2-2ab+b^2$ den kleinsten gemeinschaftlichen Dividuus. $3a^2+6ab+3b^2 = 3(a+b)^2$, $9a^2-9b^2 = 3^2(a+b)(a-b)$, $a^2-2ab+b^2 = (a-b)^2$. Der kleinste gemeinschaftliche Dividuus ist also $3^2.(a+b)^2.(a-b)^2$.

3) Es seien folgende Zahlen gegeben: 2a+b, $3a^2$, 5b, 7a, so ist der gemeinschaftliche Dividuus $210a^3b+105a^2b^2$. (Aufg. Smlg. § 8. 2.)

§ 33. Von den vier ersten Rechnungsarten mit Quotienten.

31. Lehrs. Quotienten (Brüche) mit demselben Divisor (Nenner) addirt oder subtrahirt man, indem man ihre Dividenden (Zähler) addirt oder subtrahirt und durch den Divisor (Nenner) dividirt. z. B.

$$\frac{a}{c} \pm \frac{b}{c} = \frac{a \pm b}{c}.$$

Bew.
$$\frac{a}{c}.c = a$$
$$\frac{b}{c}.c = b$$
$$\left(\frac{a}{c} \pm \frac{b}{c}\right)c = a \pm b, \text{ folglich } \frac{a}{c} \pm \frac{b}{c} = \frac{a \pm b}{c}$$

13. Aufg. Quotienten (Brüche) zu addiren.

Aufl. Sind die Divisoren (Nenner) gleich, so addire man die Dividenden (Zähler); die Summe derselben ist der Dividend (Zähler) der Summe, der Divisor (Nenner) bleibt derselbe. z. B.

$$\frac{3a}{d}+\frac{2a-3b}{d}+\frac{5b-6a}{d}=\frac{3a+2a-3b+5b-6a}{d}=\frac{2b-a}{d}$$

2) Sind die Divisoren (Nenner) ungleich, so müssen die Quotienten auf gleichen Divisor (den gemeinschaftlichen Nenner) gebracht werden und dann verfahre man nach 1).

Man suche zwischen den verschiedenen Divisoren den kleinsten gemeinschaftlichen Dividuus (12. Aufg.), so hat man den gemeinschaftlichen Nenner. z. B.

$$\frac{4a}{5zy}+\frac{2a-5b}{15x^2z}+\frac{-8a-2az}{21yz^2}$$

$$=\frac{84axz+14ayz-35byz-40ax-10axz}{105x^2yz^2}=\frac{74axz+14ayz-35byz-40ax^2}{105x^2yz^2}$$

b) $\frac{7a-5b}{10ac-2ad}+\frac{9c-\frac{7}{2}d}{25c^2-d^2}+\frac{15ab-5b}{30a^2c+6a^2d}$

Man zerlege die Divisoren: $10ac-2ad=2a(5c-d)$

$25c^2-d^2=(5c-d)(5c+d)$

$30a^2c+6a^2d=6a^2(5c+d)$

so ist der gemeinschaftliche Nenner $6a^2(5c-d)(5c+d)$. Nun multiplicire man

$(7a-5b)$ mit $(15ac+3ad)$

$(9c-\frac{7}{2}d)$ mit $6a^2$ und $(15ab-5b)$ mit $(5c-d)$, so erhält man:

$$\frac{105a^2c-75abc+21a^2d-15abd+54a^2c-21a^2d+75abc-25bc-15abd+5bd}{6a^2(5c-d)(5c+d)}$$

$$=\frac{159a^2c-30abd-25bc+5bd}{150a^2c^2-6a^2d^2}$$

(Aufg. Smlg. § 8, 3—37.)

14. Aufg. Quotienten (Brüche) zu subtrahiren.

Aufl. Man verwandele das Subtrahiren in ein Addiren und verfahre nach 13. Aufg. 1 und 2 (6. Lehrs.). z. B.

1) $\frac{5a+6b}{3n}-\frac{2a+4b}{3n}=\frac{5a+6b}{3n}+\frac{-2a-4b}{3n}$

$=\frac{5a+6b-2a-4b}{3n}=\frac{3a+2b}{3n}$

2) $\frac{7d-5g}{6ad-10bd}-\frac{-3g-a}{12ag-20bg}-\frac{13a+21b}{(3a-5b)^2}$

$=\frac{7d-5g}{6ad-10bd}+\frac{3g+a}{12ag-20bg}+\frac{-13a-21b}{(3a-5b)^2},$

$$\left.\begin{array}{r} 6\,ad - 10\,bd = 2\,d\,(3\,a - 5\,b) \\ 12\,ag - 20\,bg = 4\,g\,(3\,a - 5\,b) \\ (3\,a - 5\,b)^2 = (3\,a - 5\,b)^2 \end{array}\right\}$$ Der gemeinschaftliche Dividuus = $4\,dg\,(3\,a - 5\,b)^2$.

Nun multiplicire man $(7d - 5g)$ mit $(6ag - 10bg)$, $(3g + a)$ mit $(3ad - 5bd)$ und $(-13a - 21b)$ mit $4dg$, so erhält man:

$$\frac{42adg - 70bdg - 30ag^2 + 50bg^2 + 9adg - 15bdg + 3a^2d - 5abd - 52adg - 84bdg}{4\,dg\,(3a - 5b)^2}$$

$$= \frac{3\,a^2d - 5\,abd - adg - 30\,ag^2 + 50\,bg^2 - 169\,bdg}{36\,a^2dg - 120\,abdg + 100\,b^2dg}$$

(Aufg. Sammlg. § 9. 2—36.)

32. Lehrs. Einen Quotienten (Bruch) multiplicirt man mit einer Zahl oder umgekehrt, indem man seinen Dividenden (Zähler) mit der Zahl multiplicirt und dieses Produkt durch seinen Divisor (Nenner) dividirt, als:

$$\frac{a}{c} \cdot b = \frac{ab}{c} \text{ oder } b \cdot \frac{a}{c} = \frac{ab}{c}$$

Bew. $\frac{a}{c} \cdot c = a$ und $\frac{a}{c} \cdot cb = ab$, folglich $\frac{a}{c} \cdot b = \frac{ab}{c}$ oder $b \cdot \frac{a}{c} = \frac{ab}{c}$

z. B. 1) $\frac{24abx}{35cdy} \cdot 14cd = \frac{24abx \cdot 14cd}{35cdy} = \frac{48abx}{5y}$

2) $42a^2g \cdot \frac{55df}{21agh} = \frac{42a.ag.55df}{21agh} = \frac{110adf}{h}$

(Aufg. Smlg. § 10. 2, 3.)

33. Lehrs. Einen Quotienten (Bruch) dividirt man durch eine Zahl, indem man seinen Divisor (Nenner) mit der Zahl multiplicirt und seinen Dividenden (Zähler) durch dieses Produkt dividirt, als:

$$\frac{a}{b} : c = \frac{a}{bc}.$$

Bew. $a = \frac{a}{bc} \cdot bc$ also $\frac{a}{b} = \frac{a}{bc} \cdot c$, folglich $\frac{a}{b} : c = \frac{a}{bc}$

z. B. $\frac{8a^2b}{7xy} : 4az = \frac{8a.a.b}{7.4a\,xyz} = \frac{2ab}{7xyz}$

(Aufg. Smlg. § 11. 2, 3, a).)

34. Lehrs. Das Produkt zweier Quotienten (Brüche) ist gleich dem Produkte der Dividenden (Zähler), dividirt durch das Produkt der Divisoren (Nenner), als:

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$$

Bew. Man soll $\frac{a}{b}$ mit c multiplieiren und dann das Produkt durch d dividiren; nun ist $\frac{a}{b} . c = \frac{ac}{b}$ und $\frac{ac}{b} : d = \frac{ac}{bd}$, folglich

$$\frac{a}{b} . \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$$

z. B. 1) $\frac{3ab}{10df} . \frac{25dg}{9ah} = \frac{3.25.abdg}{10.9.ahdf} = \frac{5bg}{6fh}$

2) $\left(\frac{4a}{5b} + \frac{2b}{3d}\right) . \left(\frac{3a}{4b} - \frac{3b}{5d}\right) = \frac{3a^2}{5b^2} + \frac{a}{2d}$

$$- \frac{12a}{25d} - \frac{2b^2}{5d^2}$$

$$\frac{3a^2}{5b^2} + \frac{a}{50d} - \frac{2b^2}{5d^2}$$

(Aufg. Smlg. § 10. 4—27.)

Zus. $\frac{a}{b} . \frac{b}{a} = 1$, folglich $\frac{a}{b} = 1 : \frac{b}{a}$ oder $\frac{b}{a} = 1 : \frac{a}{b}$.

35. Lehrs. Eine Zahl wird durch einen Quotienten dividirt, indem man sie mit dem umgekehrten Quotienten multiplicirt, als:

$$a : \frac{b}{c} = a . \frac{c}{b} = \frac{ac}{b}.$$

Bew. $a = 1 . a = a . 1$, also $a : \frac{b}{c} = a . 1 : \frac{b}{c} = a . \frac{c}{b} = \frac{ac}{b}$.

z. B. $5a^2b^2 : \frac{15ab}{8xy} = \frac{5.8.a.ab.bxy}{15ab} = \frac{8abxy}{3}$.

(Aufg. Smlg. § 11. 3) b, 4) a).

36. Lehrs. Sind zwei Quotienten einander gleich, so sind es auch ihre umgekehrten Werthe. Ist $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, so ist auch $\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$.

Bew. Es sei $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, so ist $a = \frac{c}{d} . b = \frac{cb}{d}$ und $\frac{b}{a}$

$$= b : \frac{cb}{d} = \frac{bd}{bc} = \frac{d}{c}.$$

37. Lehrs. Ein Quotient (Bruch) wird durch einen Quotienten (Bruch) dividirt, indem man den Divisor umkehrt und die beiden Quotienten (Brüche) mit einander multiplicirt, als:

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} . \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}.$$

Bew. $\frac{a}{b} = \frac{a}{b}.1$ und $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b}.1 : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} . \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$.

z. B. 1) $\frac{25a^2by}{14xz^2} : \frac{125ay}{7bx^2z} = \frac{25.7a.aby.bx.xz}{14.125.axyz.z} = \frac{ab^2x}{10z}$

2) $\left(\frac{3a^2}{8b^2} - \frac{5fg}{12bc} + \frac{3a^2}{10dc}\right) : \frac{a}{2b} = \frac{3.a.a.2b}{8b.b.a} - \frac{5fg.2b}{12bc.a} + \frac{3.2.a.a.b}{10de.a}$

$= \frac{3a}{4b} - \frac{5fg}{6ac} + \frac{3ab}{5de}$.

(Aufg. Smlg § 11. 4) b, 5—28.)

§ 34. Ungleichungen.

38. Lehrs. Ungleiches mit Gleichem multiplicirt oder durch Gleiches dividirt giebt Ungleiches mit demselben Ungleichheitszeichen.

$$\begin{array}{l} a < b \\ c = d \\ \hline \end{array}$$

1) $ac < bd$ oder 2) $\frac{a}{c} < \frac{b}{d}$.

Bew. Es sei $a + x = b$
$c = d$

1) $ac + xc = bd$, folglich $ac < bd$

2) $\frac{a+x}{c} = \frac{a}{c} + \frac{x}{c} = \frac{b}{d}$, folglich $\frac{a}{c} < \frac{b}{d}$.

1. Zus. Gleiches mit Ungleichem multiplicirt giebt Ungleiches mit demselben Ungleichheitszeichen.

$$\begin{array}{c} c = d \\ a < b \\ \hline ca < bd. \end{array}$$

2. Zus. Von zwei Quotienten (Brüchen) mit gleichem Divisor (Nenner) ist derjenige der größere, welcher den größeren Dividenden (Zähler) hat.

39. Lehrs. Gleiches durch Ungleiches dividirt giebt Ungleiches mit dem entgegengesetzten Ungleichheitszeichen.

$$\begin{array}{c} a = b \\ c < d \\ \hline \frac{a}{c} > \frac{b}{d}. \end{array}$$

Bew. Es sei $a = b$

$$\frac{\begin{array}{r} a = b \\ c + x = d \end{array}}{\frac{a}{c+x} = \frac{b}{d}}$$

$\frac{a}{c+x} = \frac{b}{d}$, nun ist $a = \frac{b}{d}(c+x) = \frac{cb + bx}{d}$ und

$$\frac{a}{c} = \frac{cb + bx}{cd} = \frac{b}{d} + \frac{bx}{cd}, \text{ folglich } \frac{a}{c} > \frac{b}{d}.$$

Zus. Von zwei Quotienten (Brüchen), welche gleiche Dividenden (Zähler) haben, ist derjenige der größere, welcher den kleineren Divisor (Nenner) hat.

40. Lehrs. Ungleiches mit Ungleichem bei einerlei Ungleichheitszeichen multiplicirt giebt Ungleiches mit demselben Ungleichheitszeichen.

$$\frac{\begin{array}{c} a < b \\ c < d \end{array}}{ac < bd.}$$

Bew. Es sei

$$\frac{\begin{array}{r} a < b \\ c + x = d \end{array}}{\begin{array}{r} ac + ax < bd \\ ac < ac + ax \end{array}}$$

$$ac < bd \quad \text{(Grds. 5).}$$

41. Lehrs. Ungleiches durch Ungleiches mit entgegengesetztem Ungleichheitszeichen dividirt giebt Ungleiches mit dem ersten Ungleichheitszeichen.

$$\frac{\begin{array}{c} a < b \\ c > d \end{array}}{\frac{a}{c} < \frac{b}{d}.}$$

Bew. Es sei

$$\frac{\begin{array}{r} a + x = b \\ c > d \end{array}}{\frac{a+x}{c} < \frac{b}{d}}, \text{ also } \frac{a}{c} + \frac{x}{c} < \frac{b}{d}$$

$$\frac{a}{c} < \frac{a}{c} + \frac{x}{c}$$

$$\frac{a}{c} < \frac{b}{d} \quad \text{(Grds. 5).}$$

§ 35. Division mit Null und Unendlichgroß.

42. Lehrs. Wenn man in Null dividirt, so erhält man Null.

$$\frac{o}{a} = o.$$

Bew. $\frac{c - c}{a} = \frac{c}{a} - \frac{c}{a}$, folglich $\frac{o}{o} = o$.

Zus. Da $a \cdot o = b \cdot o = c \cdot o \ldots = o$, so ist $\frac{o}{o} = a = b = c \ldots$, d. h. $\frac{o}{o}$ ist völlig unbestimmt und kann jeden beliebigen Zahlenwerth bedeuten.

Erklärung. Unendlich klein heißt eine Größe, die kleiner als jede denkbare Zahl, unendlich groß, die größer als jede denkbare Zahl ist. Man bezeichnet unendlich groß durch ∞ [8]).

Folg. Das unendlich Kleine ist gleich Null.

43. Lehrs. Wenn man durch Null dividirt, so erhält man unendlich groß. $\frac{a}{o} = \infty$.

Bew. Es sei $\frac{a}{b} = c$. Wird b kleiner, so muß c offenbar in demselben Maße größer werden (39. Lehrs. Zus.), und wenn b über alle Grenzen hinaus abnimmt, d. h. gleich Null wird, muß c über alle Grenzen hinaus wachsen, d. h. unendlich groß werden.

Zus. $\frac{1}{\infty} = \frac{a}{\infty} = o$, dagegen $o \cdot \infty$ unbestimmt (42. Lehrs. Zus.)

§ 36. Von den Verhältnissen und Proportionen.

Erklärung. 1) Wenn das Dividiren ein Messen ist, oder wenn man untersucht, wie viel mal die eine Zahl größer sei als eine andere, so sagt man, der Dividend bildet mit dem Divisor ein Verhältniß.

Anmerkung. Dieses Verhältniß nennt man gewöhnlich das geometrische Verhältniß; untersucht man aber um wie viel die eine Zahl größer sei als eine andere, so bilden diese Zahlen das arithmetische Verhältniß. Da nur das Messen zweier gleichartigen Zahlen ein Ver-

---

[8]) Kepler aus Weil in Würtemberg (1571—1630) hat wohl zuerst diesen Begriff in die Mathematik eingeführt.

hältniß geben kann, nicht aber das Subtrahiren zweier gleichartigen Zahlen, wie schon Euler in seiner Algebra § 380 richtig bemerkt, so ist in diesem Lehrbuche unter Verhältniß immer das geometrische zu verstehen.

2) Die Zahl, welche anzeigt, wie viel mal die eine größer als die andere ist, heißt Quotient des Verhältnisses. (Gewöhnlich Exponent des Verhältnisses genannt, aber wohl mit Unrecht.) $a : b = m$.

3) Zwei Verhältnisse sind einander gleich, wenn ihre Quotienten einander gleich sind.

4) Die Verbindung zweier gleichen Verhältnisse durch das Gleichheitszeichen nennt man eine Proportion. $a : b = c : d$ oder $mb : b = md : d$.

5) Die Zahlen a, b, c, d heißen: das erste, zweite, dritte und vierte Glied; das erste und vierte Glied heißen äußere, das zweite und dritte innere oder mittlere Glieder; das erste und dritte Glied heißen auch Vorderglieder, das zweite und vierte Hinterglieder; sowohl die Vorder- als auch die Hinterglieder unter einander nennt man homologe oder ähnlichliegende Glieder.

6) Eine Proportion, deren mittlere Glieder einander gleich sind, nennt man eine stetige Proportion, wie $a : b = b : c$, sonst eine beliebige (discrete).

7) Das vierte Glied einer beliebigen Proportion nennt man die vierte Proportionalzahl; jedes der beiden mittleren Glieder einer stetigen Proportion heißt die mittlere Proportionalzahl; das vierte Glied einer stetigen Proportion heißt auch die dritte Proportionalzahl.

44. Lehrs. In jeder Proportion sind die Produkte der inneren und äußern Glieder einander gleich; $a : b = c : d$, folglich $ad = bc$.

Bew. Man multiplicire $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ mit bd, so ist $\frac{abd}{b} = \frac{cbd}{d}$ oder $ad = bc$.

1. Zus. Wenn zwei Produkte aus je zwei Faktoren einander gleich sind, so läßt sich aus ihnen immer eine Proportion bilden, indem man die Faktoren des einen Produkts zu äußern, die Faktoren des andern Produkts zu innern Gliedern macht. Ist $ad = bc$, so ist immer $a : b = c : d$ oder $b : a = d : c$.

2. Zus. Es lassen sich durch Umstellung der Verhältnisse, so wie durch Umkehrung der innern und äußern Glieder einer Proportion 8 neue Proportionen bilden.

$$a : b = c : d \qquad c : a = d : b$$
$$a : c = b : d \qquad c : d = a : b$$
$$b : a = d : c \qquad d : b = c : a$$
$$b : d = a : c \qquad d : c = b : a$$

3. Zus. Ist in einer Proportion ein inneres Glied unbekannt, so erhält man es, indem man das Produkt der beiden äußeren Glieder durch das gegebene innere dividirt; ist dagegen ein äußeres Glied unbekannt, so erhält man es durch die Division des Produkts der beiden innern Glieder durch das gegebene äußere. (Hierauf gründet sich die einfache Proportionsrechnung oder einfache Regel de tri.)

4. Zus. Sind die Vorderglieder einer Proportion einander gleich, so sind es auch die Hinterglieder, und umgekehrt.

$$\frac{a : b = a : c}{ac = ab, \text{ folglich } c = b.}$$

5. Zus. Ist das erste Glied dem zweiten gleich, so ist auch das dritte dem vierten gleich.

6. Zus. Wenn jedes Verhältniß oder die Vorder- oder die Hinterglieder einer Proportion mit einer und derselben Zahl multiplicirt oder durch eine und dieselbe Zahl dividirt werden, so bleibt die Proportion richtig.

Sei $a : b = c : d$, so ist immer: $ma : mb = c : d$

$$\frac{a}{m} : \frac{b}{m} = c : d$$
$$ma : b = mc : d$$
$$\frac{a}{m} : b = \frac{c}{m} : d$$
$$a : mb = c : md$$
$$a : \frac{b}{m} = c : \frac{d}{m} \text{ u. s. w.}$$

7. Zus. Sind in zwei Proportionen die Vorderverhältnisse einander gleich, so sind es auch die Hinterverhältnisse und umgekehrt.

$$a : b = c : d$$
$$\frac{a : b = f : g}{c : d = f : g}$$

45. Lehrs. Haben mehrere Proportionen denselben Quotienten des Verhältnisses, so bilden die Summen ihrer gleichstelligen Glieder wieder eine Proportion.

Bew. Es sei $a:b = c:d$
$e:f = g:h$
$k:l = p:n$

und der Quotient des Verhältnisses m, so ist

$$\begin{array}{lcl} a = mb & \text{und} & c = md \\ e = mf & & g = mh \\ k = ml & & p = mn \\ \hline a+e+k = m(b+f+l) & & c+g+p = m(d+h+n) \end{array}$$

folglich $\frac{a+e+k}{b+f+l} = \frac{c+g+p}{d+h+n}$

oder $(a+e+k) : (b+f+l) = (c+g+p) : (d+h+n)$.

46. Lehrs. Sind mehrere Verhältnisse einander gleich, so verhält sich immer die Summe aller Vorderglieder zur Summe aller Hinterglieder, wie ein Vorderglied zu seinem Hintergliede.

$$\frac{a:b = c:d = e:f = g:h = k:l}{(a+c+e+g+k) : (b+d+f+h+l) = a : b.}$$

Bew. Es sei $a:b = c:d = e:f = g:h = k:l$, so ist

$$\begin{array}{l} a:b = a:b \\ c:d = a:b \\ e:f = a:b \\ g:h = a:b \\ k:l = a:b \\ \hline (a+c+e+g+k):(b+d+f+h+l) = a:b. \end{array}$$

47. Lehrs. In jeder Proportion verhält sich die Summe oder Differenz des ersten und zweiten Gliedes zur Summe oder Differenz des dritten und vierten Gliedes, wie die Vorder- oder Hinterglieder zu einander.

$$\frac{a:b = c:d}{(a \pm b):(c \pm d) = a:c \text{ oder } b:d}$$

Bew. Es sei $a:b = c:d$,
so ist $ad = bc$
nun ist $db = db$

$ad \pm db = bc \pm db$ oder $d(a \pm b) = b(c \pm d)$,

folglich $(a \pm b):(c \pm d) = b:d$. (Hierauf gründet sich die Gesellschaftsrechnung).

1. Zus. $(a \pm b):(c \pm d) = (a - b):(c - d)$.

2. Zus. $\begin{aligned} ab &= ab \\ bc &= ad \\ \hline b(a \pm c) &= a(b \pm d) \\ \hline (a \pm c):(b \pm d) &= a:b \end{aligned}$

d. h. in jeder Proportion verhält sich die Summe oder Differenz der Vorderglieder zur Summe oder Differenz der Hinterglieder, wie ein Vorderglied zu seinem Hintergliede.

3. Zus. $(a + c):(b + d) = (a - c):(b - d)$.

48. Lehrs. Wenn $a:b:c = x:y:z$,
so ist auch $(a + b + c):(x + y + z) = a:x = b:y = b:z$.

Bew. Aus dem Gegebenen folgt:

$$\begin{aligned} a:x &= a:x \\ b:y &= a:x \\ c:z &= a:x \\ \hline (a+b+c):(x+y+z) &= a:x \end{aligned}$$ (45 Lehrs.)

49. Lehrs. Wenn $a:b = m:n$, $b:c = p:q$, $c:d = r:s$,
so verhält sich $a:b:c:d = mpr:npr:nqr:nqs$.

Bew. $a = \frac{mb}{n} = \frac{mpc}{nq} = \frac{mprd}{nqs}$.

$$b = \frac{pc}{q} = \frac{prd}{qs} = \frac{nprd}{nqs}.$$

$$c = \frac{rd}{s} = \frac{nqrd}{nqs}.$$

$$d = \frac{nqsd}{nqs}.$$

$$a:b:c:d = mpr:npr:nqr:nqs.$$

50. Lehrs. Sind mehrere Proportionen in beliebiger Anzahl gegeben, so erhält man immer eine richtige Proportion, wenn man alle gleichstelligen Glieder der gegebenen Proportionen mit einander multiplicirt.

Bew. Es seien $a:b = \alpha:\beta$

$$a_1:b_1 = \alpha_1:\beta_1$$

$$a_2:b_2 = \alpha_2:\beta_2$$

so ist $\frac{a}{b} = \frac{\alpha}{\beta}$

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{\alpha_1}{\beta_1}$$

$$\frac{a_2}{b_2} = \frac{\alpha_2}{\beta_2}$$

$\frac{a\, a_1\, a_2}{b\, b_1\, b_2} = \frac{\alpha\, \alpha_1\, \alpha_2}{\beta\, \beta_1\, \beta_2}$, folglich $a\, a_1 a_2 : b\, b_1 b_2 = \alpha\, \alpha_1 \alpha_2 : \beta \beta_1 \beta_2$.

1. Zus. Kommen in den Proportionen gleiche Glieder in folgender Ordnung vor, so kann man sie weglassen, als:

$$\begin{array}{c} a : b = c : z \\ d : e = z : y \\ f : g = y : x \\ \hline adf : beg = c : x \end{array}$$

Man schreibt daher die Proportion auch auf folgende Weise:

$$\left.\begin{array}{c} a : b \\ d : e \\ f : g \end{array}\right\} = c : x$$

und sagt das Verhältniß $c : x$ sei zusammengesetzt aus den Verhältnissen $a : b$, $d : e$, $f : g$. (Hierauf gründet sich die zusammengesetzte Regel de tri).

Oder $\left.\begin{array}{r} a : b = c : z \\ d : z = f : y \\ g : y = h : x \\ \hline adg : b = cfh : x \end{array}\right\}$ (Hierauf gründet sich die Kettenregel.)

2. Zus. Werden alle Glieder einer Proportion zu derselben Potenz erhoben, so entsteht wieder eine Proportion.

Es sei $a : b = c : d$

so ist $a^n : b^n = c^n : d^n$

Weil $a : b = c : d$

$$\begin{array}{c} a : b = c : d \\ \vdots \\ \hline a^n : b^n = c^n : d^n \end{array}$$

3. Zus. Wird aus allen Gliedern einer Proportion dieselbe Wurzel gezogen, so entsteht wieder eine Proportion.

Es sei $a : b = c : d$, so ist auch $\sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{c} : \sqrt[n]{d}$,

da $(\sqrt[n]{a})^n : (\sqrt[n]{b})^n = (\sqrt[n]{c})^n : (\sqrt[n]{d})^n$ wieder $a : b = c : d$ giebt.

15. Aufg. Zu drei gegebenen Zahlen a, b, c die vierte Proportionalzahl zu finden.

Aufl. (44. Lehrs. 3. Zus.) Es sei $a : b = c : x$, so ist $x = \frac{bc}{a}$.

16. Aufg. Zu zwei gegebenen Zahlen a, b die dritte Propationalzahl zu finden.

Aufl. Es sei $a : b = d : x$, so ist $x = \frac{b^2}{a}$.

17. Aufg. Zwischen zwei gegebenen Zahlen a, b die mittlere Proportionalzahl zu finden.

Aufl. Es sei $a : x = x : b$, so ist $x^2 = ab$ und $x = \sqrt{ab}$.

51. Lehrs. Das arithmetische Mittel zweier Zahlen ist größer als ihr geometrisches Mittel.

Bew. Sind a und b die gegebenen Zahlen, so ist $\frac{a+b}{2}$ ihr arithmetisches und $\sqrt{ab}$ ihr geometrisches Mittel. Nun ist $\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 = ab$, daher $\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 > ab$, folglich $\frac{a+b}{2} > \sqrt{ab}$.

§ 37. Harmonische Proportion.

Erklärung. Vier Zahlen bilden eine harmonische Proportion, wenn sich der Unterschied der beiden ersten zum Unterschiede der beiden letzten wie die erste zur vierten verhält. Sind a, b, c, d vier gegebene Zahlen, so bilden sie eine solche Proportion, wenn $(a-b) : (c-d) = a : d$ oder 5, 3, 21, 15 bilden eine harmonische Proportion, weil $(5-3) : (21-15) = 5 : 15$ ist.

Eine stetige harmonische Proportion findet unter drei Zahlen statt, wenn der Unterschied der ersten und zweiten zum Unterschiede der zweiten und dritten sich so verhält, wie die erste zur dritten Zahl. Sind a, b, c die gegebenen Zahlen, so bilden sie eine stetige harmonische Proportion, wenn $(a-b) : (b-c) = a : c$ oder 6, 4, 3 bilden eine stetige harmonische Proportion, weil $(6-4) : (4-3) = 6 : 3$. Die Zahl b(4) heißt hier das harmonische Mittel und die Zahl c (3) die dritte harmonische Proportionale.

Anmerkung. Die Benennung harmonische Proportion ist aus der Musik entlehnt und rührt daher, daß die Töne des Duraccord (Grundton, Terz, Quinte und Octave), durch die entsprechenden Saitenlängen ausgedrückt, eine harmonische Proportion bilden, z. B.

$$\begin{matrix} c & e & g & \bar{c} \\ 1, & 5/4, & 3/2, & 2. \end{matrix}$$

18. Aufg. Zu drei gegebenen Zahlen, a, b, c die vierte harmonische Proportionale x zu findden.

Aufl. Es sei $(a-b):(c-x) = a:x$, so ist $x = \frac{ac}{2a-b}$.

19. Aufg. Zu zwei gegebenen Zahlen a, c das harmonische Mittel x zu finden.

Aufl. Es sei $(a-x):(x-c) = a:c$, so ist $x = \frac{2ac}{a+c}$.

52. Lehrs. Das geometrische Mittel zweier Zahlen ist die mittlere Proportionale zu ihren arithmetischen und harmonischen Mitteln.

Bew. Sind a, b die gegebenen Zahlen, so ist $\frac{a+b}{2}$ das arithmetische, $\sqrt{ab}$ das geometrische und $\frac{2ab}{a+b}$ das harmonische Mittel, folglich $\frac{a+b}{2} : \sqrt{ab} = \sqrt{ab} : \frac{2ab}{a+b}$, denn das Produkt der äußern wie das der inneren Glieder $= ab$.

§ 38. Kettenbruch [9]).

Anmerkung. Hat ein Bruch zum Nenner und Zähler große Zahlen, welche relative Primzahlen sind, und soll sein Werth durch kleinere Zahlen wieder gegeben werden, so kann dies mit Hülfe der Kettenbrüche annäherungsweise geschehen.

Erklärung. Ein Kettenbruch ist ein Bruch, dessen Nenner aus einer ganzen Zahl und einem Bruche besteht, der wieder zum Nenner eine ganze Zahl und einen Bruch hat und so fort; oder ein Kettenbruch ist eine Verbindung von Brüchen der Art, daß jeder folgende mit dem Nenner des vorhergehenden durch Addition oder Subtraktion zusammenhängt. Die einzelnen den Kettenbruch bildenden Brüche heißen die Glieder des Kettenbruches. Haben diese alle Eins zum Zähler, und sind sie durch Addition verbunden, so bilden sie eine specielle Art Kettenbrüche, von denen hier die Rede ist. z. B.

$$\cfrac{1}{a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c\ldots}}}$$

9) Lord Brounker, der erste Präsident der englischen Societät, welche 1663 gebildet wurde, bediente sich zuerst der Kettenbrüche. — Leonhard Euler, geb. zu Basel 1707, Mitglied der St. Petersburger und eine kurze Zeit der Berliner Akademie, gest. in St. Petersburg 1783, war der erste, der eine Theorie der Kettenbrüche aufstellte.

20. Aufg. Einen ächten Bruch in einen Kettenbruch zu verwandeln.

Aufl. Man dividire Zähler und Nenner durch den Zähler, und mit jedem übrigbleibenden Bruche verfahre man ebenso, und zwar so lange, bis man zum Reste einen Bruch erhält, dessen Zähler = 1 ist.

z. B. $\frac{764}{3307} = \frac{1}{4 + {}^{251}/_{764}}$; $\frac{251}{764} = \frac{1}{3 + {}^{11}/_{251}}$; $\frac{11}{251} = \frac{1}{22 + {}^{9}/_{11}}$;

$\frac{9}{11} = \frac{1}{1 + {}^{2}/_{9}}$; $\frac{2}{9} = \frac{1}{4 + {}^{1}/_{2}}$,

folglich
$$\frac{764}{3307} = \cfrac{1}{4 + \cfrac{251}{764}} = \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{11}{251}}} = \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{22 + \cfrac{9}{11}}}}$$

$$= \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{22 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{2}{9}}}}} = \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{22 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{2}}}}}}$$

Oder man suche den gemeinschaftlichen Theiler zwischen Zähler und Nenner, so sind die Quotienten die Nenner der einzelnen Brüche, deren Zähler = 1 ist. z. B.

$$\begin{array}{l}
764 | 3307 | = 4 \\
\quad 251 | 764 | = 3 \\
\qquad 11 | 251 | = 22 \\
\qquad\quad 9 | 11 | = 1 \\
\qquad\qquad 2 | 9 | = 4 \\
\qquad\qquad\quad 1 | 2 | = 2
\end{array}$$

also
$$\frac{764}{3307} = \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{22 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{2}}}}}}$$

Sei ganz allgemein $\frac{A}{B}$ der ächte Bruch und A und B relative Primzahlen und verfährt man in der vorgeschriebenen Weise:

$$\begin{array}{l} A|B| = a \\ \quad \alpha\,|B| = b \\ \qquad \beta\,|\alpha| = c \\ \qquad\quad \gamma\,|\beta| = d, \end{array}$$

so ist $\frac{A}{B} = \cfrac{1}{a + \cfrac{\alpha}{A}} = \cfrac{1}{a + \cfrac{1}{b + \cfrac{\beta}{\alpha}}} = \cfrac{1}{a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{c + \cfrac{\gamma}{\beta}}}}$

$$= \cfrac{1}{a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{c + \cfrac{1}{d}}}}$$

21. Aufg. Einen Kettenbruch in einen gemeinen Bruch zu verwandeln.

Aufl. Das umgekehrte Verfahren von 20. Aufg. z. B.

1) $\cfrac{1}{a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{c + \cfrac{1}{d}}}} = \cfrac{1}{a + \cfrac{1}{b + \cfrac{d}{cd + 1}}} = \cfrac{1}{a + \cfrac{cd + 1}{bcd + b + d}}$

$$= \frac{bcd + b + d}{abcd + ab + ad + cd + 1}$$

2) $\cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{22 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{2}}}}}} = \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{22 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{2}{9}}}}}$

$$= \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{22 + \cfrac{9}{11}}}} = \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{11}{251}}} = \cfrac{1}{4 + \cfrac{251}{764}} = \frac{764}{3307}$$

§ 39. Erklärung. Wenn man einen Kettenbruch nicht bis zum letzten Gliede nimmt, sondern schon bei einem früheren Gliede abbricht, so erhält man die sogenannten Näherungsbrüche, welche, in gemeine Brüche verwandelt, die Näherungswerthe des gegebenen Bruches geben.

22. Aufg. Die Näherungswerthe eines Bruches anzugeben.

Aufl. Die Näherungsbrüche und demgemäß die Näherungswerthe des Bruches $\frac{A}{B} = \frac{bcd+b+d}{abcd+ad+cd+ab+1}$ sind 1) $\frac{1}{a}$,

$$2)\ \cfrac{1}{a+\cfrac{1}{b}} = \frac{b}{ab+1},\quad 3)\ \cfrac{1}{a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c}}} = \frac{bc+1}{abc+a+c},$$

$$4)\ \cfrac{1}{a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c+\cfrac{1}{d}}}} = \frac{bcd+b+d}{abcd+ad+cd+ab+1}$$

Ebenso vom Bruche $\frac{764}{3307}$:

$$1)\ \frac{1}{4},\quad 2)\ \cfrac{1}{4+\cfrac{1}{3}} = \frac{3}{13},\quad 3)\ \cfrac{1}{4+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{22}}} = \frac{67}{290},$$

$$4)\ \cfrac{1}{4+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{22+\cfrac{1}{1}}}} = \frac{70}{303},\quad 5)\ \cfrac{1}{4+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{22+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{4}}}}} = \frac{347}{1502}$$

$$\text{und } 6)\ \cfrac{1}{4+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{22+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{2}}}}}} = \frac{764}{3307}.$$

Zus. Zur Bestimmung der einzelnen Näherungswerthe eines Bruches kann man folgendes Gesetz aufstellen, das sich bei näherer Betrachtung der Näherungswerthe des Bruches $\frac{A}{B}$ leicht entwickeln läßt. Der erste Näherungswerth ist das erste Glied des Kettenbruches selbst; gleichsam als vorersten (der Ausdruck sei gestattet) wollen wir $\frac{0}{1}$ betrachten. Um nun die folgenden Näherungswerthe, als den zweiten u. s. w. zu bestimmen,

nimmt man den vorhergehenden Näherungswerth, multiplicirt dessen Zähler und Nenner mit dem Nenner des folgenden Gliedes im Kettenbruch und addirt nun zum Zähler den Zähler, zum Nenner den Nenner des zweitvorhergehenden Näherungswerthes; der so erhaltene Bruch ist der gesuchte Näherungswerth.

Anmerkung. Der (gleichsam) vorerste Näherungswerth $\frac{0}{1}$ war nöthig, um auch bei der Bestimmung des zweiten Näherungswerthes dieses Gesetz gelten zu lassen und nicht für seine Bestimmung eine andere Regel aufstellen zu müssen.

Ein Beispiel erläutere dieses Gesetz. Der Bruch $\frac{87}{200}$ ist als Kettenbruch $= \cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{8}}}}}$

Der erste Näherungswerth ist nach obigem Gesetz $= \frac{1}{2}$. Um den zweiten zu bestimmen multiplicire ich Zähler und Nenner von $\frac{1}{2}$ mit dem Nenner des folgenden Gliedes im Kettenbruche (d. i. $\frac{1}{3}$), also mit 3 und addire dann zum Zähler den Zähler des zweitvorhergehenden Näherungswerthes ($\frac{0}{1}$) d. i. 0 und zum Nenner den Nenner desselben d. i. 1, also $\frac{1.3+0}{2.3+1} = \frac{3}{7}$; es ist demnach $\frac{3}{7}$ der zweite Näherungswerth des Bruches $\frac{87}{200}$. Ebenso finde ich den dritten, also $\frac{3.2+1}{7.2+2} = \frac{7}{16}$; der vierte ist $= \frac{7.1+3}{16.1+7} = \frac{10}{23}$; der fünfte und letzte Näherungswerth endlich ist $\frac{10.8+7}{23.8+16} = \frac{87}{200}$, d. i. der gegebene Bruch selbst.

(Aufg. Smlg. § 13, 2—12).

53. Lehrs. Die Näherungswerthe eines Kettenbruches sind abwechselnd größer und kleiner als der Werth des Bruches selbst, und zwar in der Art, daß der 1te, 3te, 5te .... (2n + 1)te immer größer, dagegen der 2te, 4te, 6te .... 2nte immer kleiner sind; beide (gerade und ungerade) nähern sich immer mehr und mehr dem Werthe des Kettenbruches.

Bew. 1) $\frac{1}{a} - \frac{bcd+b+d}{abcd+ad+cd+ab+1} = \frac{cd+1}{aB}$; also $\frac{1}{a} > \frac{A}{B}$.

2) $\frac{b}{ab+1} - \frac{A}{B} = -\frac{d}{(ab+1)B}$; also $\frac{b}{ab+1} < \frac{A}{B}$.

3) $\frac{bc+1}{abc+a+c} - \frac{A}{B} = \frac{1}{(abc+a+c)B}$; also $\frac{bc+1}{abc+a+c} > \frac{A}{B}$.

Da a, b, c, d ganze Zahlen sind, so ist $cd+1>d$ und $d>1$, so wie $aB<(ab+1)B$ und $(ab+1)B<(abc+a+c)B$. Die Unterschiede werden also immer kleiner, daher nähern sich die Näherungswerthe immer mehr und mehr dem Werthe des gegebenen Bruches.

Zus. Die Differenz des letzten Näherungswerthes vom Bruche selbst ist ein Bruch, dessen Zähler $= \pm 1$ und dessen Nenner = dem gemeinschaftlichen Nenner des Subtrahenden und Minuenden ist.

Dritter Abschnitt.

Von den Potenzen.

Anmerkung. Wurzel (Grundfaktor), Exponent und Potenz können nie benannte Zahlen sein.

§ 40. Erklärung. Gleichnamige Potenzen sind solche, welche gleiche Wurzel und gleiche Exponenten haben; die Coefficienten und Vorzeichen mögen beliebig sein. Die zweite Potenz heißt auch Quadrat, so wie die dritte Potenz Cubus (aus der Geometrie entnommen).

54. Lehrs. Eine negative Zahl zur 2nten Potenz erhoben giebt eine positive Potenz, zur $(2n+1)$ten Potenz erhoben, eine negative Potenz. $(-a)^{2n} = a^{2n}$ und $(-a)^{2n+1} = -a^{2n+1}$.

Bew. (18. Lehrs. 3. Zus.)

Zus. $(\pm a)^{2n} = a^{2n}$ und $(\pm a)^{2n+1} = \pm a^{2n+1}$.

55. Lehrs. Produkte und Quotienten werden potenzirt, indem man jeden einzelnen Faktor oder Dividend und Divisor zu der angegebenen Potenz erhebt.

Bew. 1)
$(ab)^n = 1.ab.ab.ab....(n\ \text{Fakt.}) = 1.a.a.a....(n\ \text{Fakt.}).1.b.b....(n\ \text{Fakt.}) = a^n b^n$.

2) $\left(\frac{a}{b}\right)^n = 1 . \frac{a}{b} . \frac{a}{b} ... (n\ \text{Fakt.}) = \frac{1.a.a....(n\ \text{Fakt.})}{1.b.b....(n\ \text{Fakt.})} = \frac{a^n}{b^n}$
$= a^n b^{-n} = \frac{b^{-n}}{a^{-n}}$.

Zus. 1) $(-ab)^{2n} = a^{2n} b^{2n}$; 2) $(-ab)^{2n+1} = -a^{2n+1}b^{2n+1}$;

3) $(ab)^{-n} = \frac{1}{(ab)^n} = \frac{1}{a^n b^n} = a^{-n} b^{-n}$; 4) $(-ab)^{-n} = \pm a^{-n} b^{-n}$;

5) $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = 1 : \left(\frac{a}{b} . \frac{a}{b} ....\right) = 1 : \frac{a^n}{b^n} = \frac{b^n}{a^n} = b^n a^{-n} = \frac{a^{-n}}{b^{-n}}$.

23. Aufg. Producte und Quotienten zu potenziren.

Aufl. (55. Lehrs.) 1) $(5ab)^3 = 5^3 a^3 b^3 = 125 a^3 b^3$;

2) $(-{}^3/_4 ab)^{-2} = \frac{3^{-2} a^{-2} b^{-2}}{4^{-2}} = \frac{16}{9a^2b^2}$; 3) $\left(-\frac{4ab}{5cd}\right)^{-3} = -\frac{4^{-3}a^{-3}b^{-3}}{5^{-3}c^{-3}d^{-3}}$
$= -\frac{125c^3d^3}{64a^3b^3}$. 4) $\left(\frac{12a.abc}{9.ab.b}\right)^4 = \frac{256a^4c^4}{81b^4}$.

(Aufg. Smlg. § 14. 11—24).

24. Aufg. Potenzen zu addiren und subtrahiren.

Aufl. Man kann nur gleichnamige Potenzen addiren und subtrahiren, und zwar indem man ihre Coefficienten addirt und subtrahirt und zu dem so gewonnenen Coefficienten die Potenz als Faktor schreibt.

(Aufg. Smlg. § 15, 1—9.)

56. Lehrs. Potenzen von gleichen Wurzeln werden mit einander multiplicirt, indem man die Wurzel einmal schreibt und zum Exponenten die Summe der Exponenten der Faktoren nimmt.

Bew. 1) $a^n . a^m = 1 . a . a . a .... (n\ \text{Fakt.}) . 1 . a.a .... (m\ \text{Fakt.})$
$= 1 . a . a . a . a . a ...... (n+m\ \text{Fakt.}) = a^{n+m}$.

2) $a^n . a^{-m} = 1 . a.a.a ... (n\ \text{Fakt.}) . \frac{1}{a . a ... (m\ \text{Fakt.})}$.

Nun ist $\frac{a}{a} = 1$, also heben, wenn $n > m$ ist, m Faktoren im Nenner m Faktoren im Zähler auf und es bleiben im Zähler $n-m$ Faktoren, also a^{n-m}; ist $m > n$, so heben n Faktoren im Zähler und Nenner einander auf und es bleiben im Nenner $m-n$ Faktoren, also $\frac{1}{a^{m-n}} = a^{-(m-n)} = a^{n-m}$ folglich ist immer $a^n . a^{-m} = a^{n-m}$.

3) $a^{-n} . a^{m} = \frac{1}{a . a \ldots} . 1 . a . a . a \ldots = a^{-n+m} = a^{m-n}$.

4) $a^{-n} . a^{-m} = \frac{1}{a.a\ldots} . \frac{1}{a.a.a\ldots} = \frac{1}{a^{n+m}} = a^{-(n+m)} = a^{-n-m}$.

5) $\left(\frac{a}{b}\right)^{m} . \left(\frac{a}{b}\right)^{n} = \left(\frac{a}{b}\right)^{m+n} = \frac{a^{m+n}}{b^{m+n}} = a^{m+n} b^{-m-n}$.

6) $\left(\frac{a}{b}\right)^{-m} . \left(\frac{a}{b}\right)^{n} = \left(\frac{a}{b}\right)^{-m+n} = \frac{a^{-m+n}}{b^{-m+n}} = \frac{a^{n} b^{m}}{a^{m} b^{n}}$.

7) $\left(\frac{a}{b}\right)^{-m} . \left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \frac{a^{-m-n}}{b^{-m-n}} = \frac{b^{m+n}}{a^{m+n}} = b^{m+n} a^{-m-n}$.

Zus. $a^{n} . a^{n} = a^{2n} = (a . a)^{n} = (a^{2})^{n}$.

57. Lehrs. Potenzen von ungleichen Wurzeln, aber mit gleichen Exponenten werden mit einander multiplicirt, indem man die Wurzeln mit einander multiplicirt und als Exponenten den gleichen Exponenten setzt.

$$a^{n} b^{n} = (a b)^{n}.$$

Bew. (55. Lehrs.)

Anmerk. Haben die Potenzen ungleiche Wurzeln und ungleiche Exponenten, so schreibe man sie neben einander, als $a^{n} . b^{m} = a^{n} b^{m}$.

25. Aufg. Potenzen mit einander zu multipliciren.

Aufl. 1) $3 a^{2} . 4 a^{5} = 12 a^{7}$;

2) $- \frac{2}{3} a^{2} b^{3} . \frac{3}{5} a^{-3} b^{-5} . \frac{1}{4} a b^{10} = - \frac{1}{10} b^{8}$;

3) $\frac{2ab^{2}c^{-3}}{3x^{2}y^{-1}} . \frac{6a^{2}b^{-2}c^{7}}{7x^{6}y^{3}} = \frac{4a^{3}c^{4}y}{7x^{8}}$;

4)
$$\begin{array}{r} \frac{5}{6} a^{2} b^{-5} c - \frac{3}{4} a^{4} b^{-7} c^{3} \\ 3 a^{5} b^{7} c^{-4} + \frac{6}{7} a^{7} b^{5} c^{-2} \\ \hline \frac{5}{2} a^{7} b^{2} c^{-3} - \frac{9}{4} a^{9} c^{-1} \qquad\qquad \\ + \frac{5}{7} a^{9} c^{-1} - \frac{9}{14} a^{11} b^{-2} c \\ \hline \frac{5}{2} a^{7} b^{2} c^{-3} - \frac{43}{28} a^{9} c^{-1} - \frac{9}{14} a^{11} b^{-2} c. \end{array}$$

(Aufg. Smlg. § 16. 1—33.)

58. Lehrs. Potenzen von gleichen Wurzeln werden durch einander dividirt, indem man die Wurzel einmal schreibt und als Exponenten die Differenz des Exponenten des Divisors vom Exponenten des Dividenden setzt.

Bew. 1) $a^{n} : a^{m} = a^{n} . \frac{1}{a^{m}} = a^{n} . a^{-m} = a^{n-m}$.

2) $a^{n} : a^{-m} = a^{n} : \frac{1}{a^{m}} = a^{n} . 1 : \frac{1}{a^{m}} = a^{n} . a^{m} = a^{n+m}$. (35. Lehrs.)

3) $a^{-n} : a^m = \frac{1}{a^n} : a^m = \frac{1}{a^n \cdot a^m} = \frac{1}{a^{n+m}} = a^{-(n+m)} = a^{-n-m}$.

4) $a^{-n} : a^{-m} = \frac{1}{a^n} : \frac{1}{a^m} = \frac{1}{a^n} \cdot \frac{a^m}{1} = \frac{a^m}{a^n} = a^m \cdot a^{-n} = a^{m-n} = a^{-n+m}$
$= a^{-n-(-m)}$.

5) $\frac{a^n}{b^m} : \frac{a^p}{b^q} = \frac{a^n}{b^m} \cdot \frac{b^q}{a^p} = \frac{a^n a^{-p}}{b^n b^{-q}} = \frac{a^{n-p}}{b^{m-q}} = a^{n-p} b^{q-m}$.

6) $\frac{a^n}{b^m} : \frac{a^{-p}}{b^{-q}} = \frac{a^{n+p}}{b^{m+q}} = a^{n+p} b^{-m-q}$.

7) $\frac{a^{-n}}{b^{-m}} : \frac{a^p}{b^q} = \frac{a^{-n-p}}{b^{-m-q}} = a^{-n-p} b^{m+q} = \frac{b^{m+q}}{a^{n+p}}$.

8) $\frac{a^{-n}}{b^{-m}} : \frac{a^{-p}}{b^{-q}} = \frac{a^{-n+p}}{b^{-m+q}} = a^{p-n} b^{m-q}$.

Zus. Ist $n = m$ in $a^n : a^m = a^{n-m}$, so ist $a^{m-m} = a^0$ und $\frac{a^m}{a^m} = 1$, folglich $a^0 = 1$. (§ 19. 2. Folg.)

59. Lehrs. Potenzen von ungleichen Wurzeln, aber mit gleichen Exponenten werden durch einander dividirt, indem man die Wurzeln durch einander dividirt und als Exponenten den gleichen Exponenten setzt.
$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$.

Bew. 55. Lehrs.

26. Aufg. Potenzen durch einander zu dividiren.

Aufl. 1) $4a^2b^9c^{-1} : 7a^6b^{-2}c^4 = \frac{4}{7} a^{-4}b^{11}c^{-5} = \frac{4b^{11}}{7a^4c^5}$.

2) $\frac{\frac{1}{2}a^2b^3}{\frac{2}{3}d^4f^7} : \frac{\frac{3}{4}a^7b^{-9}}{\frac{5}{6}d^4f^{-2}} = \frac{3a^2b^3}{4d^4f^7} \cdot \frac{10d^4f^{-2}}{9a^7b^{-9}} = \frac{5a^2b^3d^4b^9}{6d^4f^7a^7f^2} = \frac{5a^{-5}b^{12}}{6f^9} = \frac{5b^{12}}{6a^5f^9}$

3) $8a^{-2}b^2 - 3a^{-1}b^4 \mid 120a^{-8}b^4 - 101a^{-7}b^6 + 69a^{-6}b^8 - 18a^{-5}b^{10} \mid = 15a^{-6}b^2 - 7a^{-5}b^4 + 6a^{-4}$
$120a^{-8}b^4 - 45a^{-7}b^6$
$-56a^{-7}b^6$
$-56a^{-7}b^6 + 21a^{-6}b^8$
$48a^{-6}b^8$
$48a^{-6}b^8 - 18a^{-5}b^{10}$.

4) $a - b \mid a^n - b^n \mid = a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 \dots + b^{n-1}$
$a^n \quad - ba^{n-1}$
$a^{n-1}b$
$a^{n-1}b - a^{n-2}b^2$
$a^{n-2}b^2$
$a^{n-2}b^2 - a^{n-3}b^3$.
u. s. w.

(Aufg. Smlg. § 17. 1—44.)

60. Lehrs. Die Potenz einer Potenz ist wieder eine Potenz, deren Wurzel dieselbe ist (wie die der ursprünglichen Potenz), deren Exponent aber das Produkt der gegebenen Exponenten ist.

Bew. 1) $(a^n)^m = 1.a^n.a^n.a^n \ldots (m$ Fakt.$) = a^{n+n+n \ldots (m \text{ Summand})} = a^{nm}$;
2) $(-a^n)^{2m} = a^{2nm}$; 3) $(-a^n)^{2m+1} = -a^{2mn+n}$;

4) $(a^n)^{-m} = \frac{1}{a^n a^n \ldots} = \frac{1}{a^{nm}} = a^{-nm}$;

5) $(a^{-n})^m = 1 . a^{-n} . a^{-n} \ldots = a^{-nm}$;

6) $(a^{-n})^{-m} = \frac{1}{a^{-n} . a^{-n} \ldots} = \frac{1}{a^{-nm}} = a^{nm}$;

7) $\left((a^{-n})^{-m}\right)^p = (a^{nm})^p = a^{nmp}$

Zus. $(a^n)^m = (a^m)^n$.

Anmerkung. Werden die Klammern (60. Lehrs.) weggelassen, z. B. $a^{b^{c^d}}$, so heißt es, man soll c zur dten Potenz erheben, diese Potenz sei α, also $a^{b^{c^d}} = a^{b^\alpha}$, dann b zur αten Potenz, das sei gleich β, also $a^{b^\alpha} = a^\beta$; z. B. $3^{4^{3^2}} = 3^{4^9} = 3^{262144}$. Um diese Zahl zu schreiben hat man 125075 Ziffern nöthig. Rechnet man auf jede Quartseite 65 Reihen, in jeder Reihe 50 Ziffern, so kommen auf einen Bogen 26000 Ziffern; folglich braucht man, um diese Zahl zu schreiben, etwa 5 Bogen. Hingegen $\left[(3^4)^3\right]^2 = 3^{24}$ hat nur 12 Ziffern.

27. Aufg. Potenzen zu potenziren.

Aufl. $\left[\left(-\frac{8a^5b^{-2}}{3x^4}\right)^2\right]^{-1} = \left(\frac{2^6a^{10}b^{-4}}{3^2x^8}\right)^{-1} = \frac{2^{-6}a^{-10}b^4}{3^{-2}x^{-8}} = \frac{3^2b^4x^8}{2^6a^{10}}$.

(Aufg. Smlg. § 14. 49—56. § 18. 1—13.)

61. Lehrs. Die zweite Potenz eines Binoms $(a \pm b)$ besteht aus drei Gliedern: aus der zweiten Potenz des ersten Gliedes plus oder minus dem doppelten Produkt des ersten und zweiten Gliedes, plus der zweiten Potenz des zweiten Gliedes des Binoms.

Bew. 1) $(a \pm b)^2 = 1 . (a \pm b)(a \pm b) = a^2 \pm 2ab + b^2$;
2) $(b-a)^2 = b^2 - 2ab + a^2$;
3) $(-a-b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

1. Zus. $(-a-b)^2 = (a+b)^2$ und $(b-a)^2 = (a-b)^2$ *).

*) Daraus folgt aber nicht, daß $-a-b = a+b$ und $b-a = a-b$ ist.

2. Zus. Die zweite Potenz eines Polynoms besteht aus den zweiten Potenzen eines jeden einzelnen Gliedes und den doppelten Produkten eines jeden Gliedes mit der Summe aller nachfolgenden.

$(a+b+c+d+e\ldots)^2 = a^2+b^2+c^2+d^2+e^2\ldots+2a(b+c+d+e\ldots)$
$+2b(c+d+e\ldots)+2c(d+e\ldots)+2de\ldots\ldots$

28. Aufg. Summen und Differenzen zur zweiten Potenz zu erheben.

Aufl. 1) $({}^2/_3ab+6bd)^2 = ({}^2/_3ab)^2 + 2\,.\,{}^2/_3ab\,.\,6bd + (6bd)^2$
$= {}^4/_9a^2b^2 + 8ab^2d + 36b^2d^2$.

2) $(0{,}4a^2b^{-3}-0{,}5b^8d^4)^2 = (0{,}4a^2b^{-3})^2 - 2.0{,}4a^2b^{-3}.0{,}5b^8d^4 + (0{,}5b^8d^4)^2$
$= 0{,}16a^4b^{-6} - 0{,}4a^2b^5d^4 + 0{,}25b^{16}d^8$.

3) $(4ab+7bd-10d)^2 = 16a^2b^2+49b^2d^2+100d^2+56ab^2d$
$-80abd-140bd^2$.

(Aufg. Smlg. § 14. 27—34, 42—47. § 18. 14—18.)

62. Lehrs. Die dritte Potenz eines Binoms $(a \pm b)$ enthält vier Glieder: Cubus des ersten Gliedes $\pm$ dem dreifachen Produkte des Quadrats des ersten Gliedes mit dem zweiten $+$ dem dreifachen Produkte des ersten Gliedes mit dem Quadrate des zweiten $\pm$ dem Cubus des zweiten Gliedes des Binoms.

Bew. $(a\pm b)^3 = 1\,.\,(a\pm b)(a\pm b)(a\pm b) = a^3\pm 3a^2b+3ab^2\pm b^3$.

29. Aufg. Binome zur dritten Potenz zu erheben.

Aufl. $({}^5/_6ab-{}^7/_{11}bd)^3 = ({}^5/_6ab)^3 - 3\,.\,({}^5/_6ab)^2\,.\,{}^7/_{11}bd$
$+3\,.\,{}^5/_6ab\,.\,({}^7/_{11}bd)^2 - ({}^7/_{11}bd)^3$
$= \frac{125}{216}a^3b^3 - \frac{175}{132}a^2b^3d + \frac{245}{242}ab^3d^2 - \frac{343}{1331}b^3d^3$.

(Aufg. Smlg. § 14. 35—41. § 18. 19—22.)

63. Lehrs. Die nte Potenz eines Binoms $(a+b)$ lautet, wenn n eine ganze positive Zahl ist, $= a^n + \frac{n}{1}a^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{1\,.\,2}a^{n-2}b^2$
$+ \frac{n(n-1)(n-2)}{1\,.\,2\,.\,3}a^{n-3}b^3 \ldots + nab^{n-1} + b^n$ [10]).

---

[10]) Diese Formel nennt man den binomischen Lehrsatz oder das Newtonsche Theorem. Die Coefficienten der Potenzen a und b nennt man Binomialcoefficienten. Sie kommen zuerst in Stiefel's Arithmetica integra vor, welche 1544 gedruckt ist. — Newton (geb. 1642, † 1727) war es, der entdeckte, daß die Form des binomischen Lehrsatzes, welche man für ganze Exponenten gefunden hatte, für alle Arten von Exponenten gültig ist. Diese Entdeckung ist, als eine der schönsten von diesem großen Manne, auf seinem Grabmale in der Westminster-Abtey eingegraben.

Bew. Durch Multiplication erhällt man:

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$
$(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$.
u. s. w.

Betrachtet man diese Formeln, so findet man, daß die Anzahl der Glieder immer um 1 größer ist als die Potenz, zu welcher erhoben werden soll; ferner fallen die Exponenten des ersten Gliedes von der höchsten Potenz bis 0 und die Exponenten des zweiten Gliedes steigen von 0 bis zur höchsten Potenz. Bezeichnet man

$\frac{a^2}{1.2} = a_c^{2}, \ \frac{a^3}{1.2.3} = a_c^{3}, \ \frac{a^4}{1.2.3.4} = a_c^{4}$, ebenso

$\frac{b^2}{1.2} = b_c^{2}, \ \frac{b^3}{1.2.3} = b_c^{3}$ und $\frac{(a+b)^2}{1.2} = (a+b)_c^{2}, \ \frac{(a+b)^3}{1.2.3}$

$= (a+b)_c^{3}, \ \frac{(a+b)^n}{1.2 \ldots n} = (a+b)_c^{n}$, so erhält man folgende Gleichungen:

$(a+b)_c^{2} = a_c^{2} + ab + b_c^{2}$

$(a+b)_c^{3} = a_c^{3}b + a_c^{2}b + ab_c^{2} + b_3^{c}$

$(a+b)_c^{4} = a_c^{4} + a_c^{3}b + a_c^{2}b_c^{2} + a\,b_c^{3} + b_c^{4}$

$(a+b)_c^{5} = a_c^{5} + a_c^{4}b + a_c^{3}b_c^{2} + a_c^{2}b_c^{3} + a\,b_c^{4} + b_c^{5}$. u. s. w.

Hieraus läßt sich auf die Allgemeinheit des Satzes schließen, so daß, wenn n eine positive ganze Zahl bedeutet,

$(a+b)_c^{n} = a_c^{n} + a_c^{n-1}b + a_c^{n-2}b^2 + a_c^{n-3}b_c^{3} \ldots + ab_c^{n-1} + b_c^{n}$.

Kann man zeigen, daß dieser Satz, der für n richtig ist, auch für n+1 wahr ist, so ist die Allgemeinheit des Satzes bewiesen; denn setzen wir für n = 2, 3, 4,....5, so ist der Satz, wie wir durch Multiplication gefunden haben, richtig, folglich auch für 6 und deshalb für 7, 8 u. s. w., überhaupt für jede positive ganze Zahl.

Anmerkung. Eine solche Schlußart nennt man einen Beweis durch Induction.

Man multiplicire $(a+b)_c^{n}$ mit a+b und die andere Seite der Gleichung erst mit a, dann mit b, so erhält man, da

$$\frac{(a+b)^n.(a+b)}{1.2.3\ldots n} = \frac{(a+b)^{n+1}}{1.2.3\ldots n} = \frac{(n+1)(a+b)^{n+1}}{1.2.3\ldots n(n+1)} = (n+1)(a+b)_c^{n+1},$$

ebenso $a_c^{n-3}.a = \frac{a^{n-3}.a}{1.2.3\ldots(n-3)} = \frac{a^{n-2}}{1.2.3\ldots(n-3)}$

$= \frac{(n-2)a^{n-2}}{1.2.3\ldots(n-3)(n-2)} = (n-2)a_c^{n-2}$ u. s. w., folgende Gleichung

$$(n+1)(a+b)_c^{n+1}$$

$$=(n+1)a_c^{n+1} + {n \atop +1}\Big| a_c^n b + {(n-1) \atop +2}\Big| a_c^{n-1}b_c^2 + {(n-2) \atop +3}\Big| a_c^{n-2}b_c^3 \ldots + {2 \atop +(n-1)}\Big| a_c^2 b_c^{n-1} + {1 \atop +n}\Big| ab_c^n + (n+1)b_c^{n+1}$$

$$=(n+1)a_c^{n+1} + (n+1)a_c^n b + (n+1)a_c^{n-1}b_c^2 + (n+1)a_c^{n-2}b_c^3 \ldots + (n+1)a_c^2 b_c^{n-1} + (n+1)ab_c^n$$
$$+(n+1)b_c^{n+1}.$$

Diese Gleichung durch $n+1$ dividirt, giebt:

$$(a+b)_c^{n+1} = a_c^{n+1} + a_c^n b + a_c^{n-1}b_c^2 + a_c^{n-2}b_c^3 \ldots + a_c^2 b_c^{n-1} + ab_c^n + b_c^{n+1}.$$

Multiplicirt man die obige Gleichung $(a+b)_c^n$ mit $1.2.3\ldots(n+1)^n$, so verwandelt sich dieselbe, weil $1.2.3\ldots(n-1)n.(a+b)_c^n = (a+b)^n$ und $a_c^{n-1}b.1.2.3\ldots(n-1)n = na^{n-1}b$, ebenso

$$a_c^{n-3}b_c^3.1.2.3\ldots(n-1)n = \frac{a^{n-3}b^3.1.2.3\ldots(n-3)(n-2)(n-1)n}{1.2.3\ldots(n-3).1.2.3}$$

$= \frac{(n-2)(n-1)na^{n-3}b^3}{1.2.3}$ u. s. w. in folgende: $(a+b)^n$

$$= a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{1.2}a^{n-2}b^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}a^{n-3}b^3 \ldots + b^n.$$

Zus. Hat man $(a-b)^n$, so werden diejenigen Glieder, in welchen b ungerade Exponenten hat, minus, die übrigen plus.

30. Aufg. Binome (Summen und Differenzen) zur nten Potenz zu erheben.

Aufl. $(2a+3b)^5 = (2a)^5 + 5(2a)^4.3b + \frac{5.4}{1.2}(2a)^3.(3b)^2$

$+ \frac{5.4.3}{1.2.3}(2a)^2.(3b)^3 + \frac{5.4.3.2}{1.2.3.4}.2a.(3b)^4 + \frac{5.4.3.2.1}{1.2.3.4.5}(3b)^5$

$= 32a^5 + 240a^4b + 720a^3b^2 + 1080a^2b^3 + 810ab^4 + 241b^5$.

(Aufg. Smlg. § 29. 34, 35, 39, 40, 46, 47, 48, 60, 61, 123, 125, 135, 136).

Vierter Abschnitt.

Von den Wurzeln.

Anmerkung. Wurzel, Wurzelexponent und Potenz können nur unbenannte Zahlen sein.

§ 41. **Erklärung.** Gleichnamig sind Wurzeln, wenn sie gleiche Wurzelexponenten und gleiche Potenzen haben, z. B. $4\sqrt{3} - \frac{2}{3}\sqrt{3} + 2\sqrt{3}$ oder $3\sqrt[3]{a} + 5\sqrt[3]{a} - 2\sqrt[3]{a}$, dagegen sind $5\sqrt[3]{a} - 3\sqrt{b} - 7\sqrt[4]{2a}$ ungleichnamig. Die zweite Wurzel heißt auch Quadratwurzel und die dritte Cubikwurzel. Den Wurzelexponenten 2 läßt man gewöhnlich weg, als $\sqrt[2]{a} = \sqrt{a}$ (sprich: Wurzel aus a). Eine Wurzel, deren Werth sich genau darstellen läßt, heißt rational, z. B. $\sqrt[3]{125} = 5$, hingegen eine Wurzel, deren Werth sich nicht genau darstellen läßt, irrational, z. B. $\sqrt{3} = \pm 1,732\ldots$ (Geometrisch läßt sich $\sqrt{3}$ sehr genau darstellen). Ueberhaupt nennt man solche Zahlen, welche weder durch ganze noch durch gebrochene Zahlen, daher durch keine endliche Form vollständig ausgedrückt werden können, irrationale Zahlen, weil sich ihr Verhältniß zur Einheit weder durch eine ganze noch durch eine gebrochene Zahl genau angeben läßt, im Gegensatz zu den übrigen in endlicher Form darstellbaren Zahlen, welche man rationale Zahlen nennt.

64. **Lehrs.** Jede gerade Wurzel aus einer positiven Zahl ist sowohl positiv als negativ; jede ungerade Wurzel aus einer positiven Zahl ist positiv, aus einer negativen aber negativ.

1) $a^{\frac{1}{2n}} = \pm a^{\frac{1}{2n}}$ oder $\sqrt[2n]{a} = \pm \sqrt[2n]{a}$,

2) $a^{\frac{1}{2n+1}} = + a^{\frac{1}{2n+1}}$ oder $\sqrt[2n+1]{a} = + \sqrt[2n+1]{a}$,

3) $(-a)^{\frac{1}{2n+1}} = - a^{\frac{1}{2n+1}}$ oder $\sqrt[2n+1]{-a} = - \sqrt[2n+1]{a}$.

Bew. 1) Da (54. Lehrs. Zus.) $(\pm b)^{2n} = b^{2n} = a$, so ist umgekehrt $a^{\frac{1}{2n}} = \pm b = \pm a^{\frac{1}{2n}}$ (§ 26. Folg. 1), und 2) und 3), da $(\pm b)^{2n+1} = \pm b^{2n+1} = \pm a$, so ist $(\pm a)^{\frac{1}{2n+1}} = \pm a^{\frac{1}{2n+1}}$ oder $\sqrt[2n+1]{\pm a} = \pm \sqrt[2n+1]{a}$.

z. B. $\sqrt{64} = \pm 8$, $\sqrt[3]{64} = 4$ und $\sqrt[3]{-64} = -\sqrt[3]{64} = -4$.

1. Zus. $(1)^{\frac{1}{2n}} = \pm 1$ oder $\sqrt[2n]{1} = \pm 1$ und $(-1)^{\frac{1}{2n+1}} = -1$ oder $\sqrt[2n+1]{-1} = -1$.

2. Zus. Die gerade Wurzel aus einer negativen Zahl ist unmöglich, weil zwei gleiche Faktoren nie ein negatives Produkt geben. Solche Zahlen heißen imaginäre, als $(-a)^{\frac{1}{2n}}$ oder $\sqrt[2n]{-a}$; alle andere Zahlen heißen reelle.

65. Lehrs. Ein Produkt extrahirt man, indem man jeden seiner Faktoren extrahirt.

$$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \, . \, \sqrt[n]{b}.$$

Bew. Es sei 1) ab positiv und n jede beliebige ganze Zahl, so ist immer:

$$\begin{array}{rl} a &= x^n \\ b &= y^n \\ \hline ab &= x^n \, y^n = (xy)^n \end{array}$$

$$\text{und } xy = \sqrt[n]{ab}$$

$$\text{da ferner } x = \sqrt[n]{a}$$

$$y = \sqrt[n]{b}$$

$$\text{so ist } xy = \sqrt[n]{a} \, . \, \sqrt[n]{b};$$

$$\text{also } \sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \, . \, \sqrt[n]{b}.$$

Ist 2) ab negativ (wo entweder a oder b negativ sein muß) und n eine ungerade Zahl, so ist immer:

$$\begin{array}{rl} -a &= (-x)^n \\ b &= y^n \\ \hline -ab &= (-xy)^n \end{array}$$

$$\text{und } -xy = \sqrt[n]{-ab}$$

$$\text{da ferner } -x = \sqrt[n]{-a}$$
$$y = \sqrt[n]{b}$$
$$\text{so ist } -xy = \sqrt[n]{-a} \cdot \sqrt[n]{b}$$
$$\text{also } \sqrt[n]{-ab} = \sqrt[n]{-a} \cdot \sqrt[n]{b}.$$

Zus. $\sqrt[n]{a^n b} = \sqrt[n]{a^n} \cdot \sqrt[n]{b} = a\sqrt[n]{b}$; $\sqrt[3]{24} = \sqrt[3]{8 \cdot 3} = 2\sqrt[3]{3}$.

66. Lehrs. Einen Quotienten extrahirt man, indem man jedes seiner beiden Glieder extrahirt.

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} \text{ oder } \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{n}} = \frac{a^{\frac{1}{n}}}{b^{\frac{1}{n}}}.$$

Bew. Wie Lehrs. 65.

67. Lehrs. Eine Potenz extrahirt man, indem man die Wurzel der Potenz hinschreibt und als Exponenten das Produkt der Exponenten nimmt.

$$(a^m)^{\frac{1}{n}} = a^{\frac{m}{n}}.$$

Bew. Es sei 1) a^m positiv, m und n relative Primzahlen und n zugleich eine ungerade Zahl, so ist immer $(a^m)^{\frac{1}{n}} = a^x$, folglich $a^m = a^x \cdot a^x \ldots\ldots$ (n Fakt.) $= a^{nx}$, also $m = nx$ und $x = \frac{m}{n}$, folglich $(a^m)^{\frac{1}{n}} = a^{\frac{m}{n}}$. Ist aber n eine gerade Zahl, so ist $(a^m)^{\frac{1}{n}} = \pm a^x$, also $(a^m)^{\frac{1}{n}} = \pm a^{\frac{m}{n}}$.

Ist 2) a^m negativ, m und n relative Primzahlen und n eine ungerade Zahl, so ist nach demselben Beweise $(-a^m)^{\frac{1}{n}} = -a^{\frac{m}{n}}$.

Zus. $\pm a^{\frac{m}{n}} = \pm a^{\frac{mr}{nr}} = \pm \sqrt[nr]{a^{mr}}$, d. h. die Wurzel aus einer Potenz ändert sich nicht, wenn man Wurzel- und Potenzexponenten mit derselben Zahl multiplicirt oder durch dieselbe Zahl dividirt.

68. Lehrs. Wurzeln mit ungleichen Potenzen aber gleichen Wurzelexponenten multiplicirt man mit einander, indem man ihre Potenzen mit einander multiplicirt und als Exponenten den gleichen Wurzelexponenten setzt.

$$a^{\frac{1}{n}} \cdot b^{\frac{1}{n}} = (ab)^{\frac{1}{n}}$$

Bew. Siehe Lehrsatz 65.

Zus. $\sqrt[n]{a^m b^m} = \sqrt[n]{a^m} . \sqrt[n]{b^m}$, umgekehrt $a^{\frac{m}{n}} b^{\frac{m}{n}} = (a^m b^m)^{\frac{1}{n}}$

69. Lehrs. Wurzeln mit gleichen Potenzen multiplicirt man mit einander, indem man die Potenz hinschreibt und zum Exponenten die Summe der Bruchexponenten der Faktoren nimmt.

$$a^{\frac{1}{n}} . a^{\frac{1}{m}} = a^{\frac{1}{n} + \frac{1}{m}}.$$

Bew. Es ist $a^{\frac{1}{m}} = a^{\frac{n}{nm}}$ und $a^{\frac{1}{n}} = a^{\frac{m}{nm}}$, also $a^{\frac{1}{m}} . a^{\frac{1}{n}} = a^{\frac{n}{nm}} . a^{\frac{m}{nm}}$ $= (a^n a^m)^{\frac{1}{nm}}$ (68. Lehrs. Zus.) $= (a^{n+m})^{\frac{1}{nm}} = a^{\frac{n+m}{nm}} = a^{\frac{n}{nm} + \frac{m}{nm}} = a^{\frac{1}{m} + \frac{1}{n}}$

Zus. $a^{1/2} . a^{1/2} = \pm a^{1/2} . \pm a^{1/2} = \pm a$

70. Lehrs. Wurzeln mit ungleichen Potenzen aber gleichen Wurzelexponenten dividirt man durch einander, indem man ihre Potenzen durch einander dividirt und als Exponenten den gleichen Wurzelexponenten setzt.

$$\frac{a^{\frac{1}{n}}}{b^{\frac{1}{n}}} = \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{n}}.$$

Bew. Siehe Lehrs. 66.

Zus. $\frac{a^{\frac{m}{n}}}{b^{\frac{m}{n}}} = \left(\frac{a^m}{b^m}\right)^{\frac{1}{n}}$.

71. Lehrs. Wurzeln mit gleichen Potenzen dividirt man durch einander, indem man die Potenz hinschreibt und zum Exponenten die Differenz des Bruchexponenten des Divisors von dem des Dividenden nimmt.

$$a^{\frac{1}{m}} : a^{\frac{1}{n}} = a^{\frac{1}{m} - \frac{1}{n}}.$$

Bew. Es ist $a^{\frac{1}{m}} : a^{\frac{1}{n}} = a^{\frac{n}{nm}} : a^{\frac{m}{nm}} = (a^n : a^m)^{\frac{1}{nm}} = (a^{n-m})^{\frac{1}{nm}}$ $= a^{\frac{n-m}{nm}} = a^{\frac{n}{nm} - \frac{m}{nm}} = a^{\frac{1}{m} - \frac{1}{n}}$.

72. Lehrs. Eine Wurzel potenzirt man, indem man die Potenz hinschreibt und als Exponenten das Produkt der Exponenten setzt.

$$\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m = a^{\frac{m}{n}} \text{ oder } (\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}.$$

Bew. $\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m = a^{\frac{1}{n}} . a^{\frac{1}{n}} \ldots\ldots$ (m Fakt.) $= a^{\frac{m}{n}}$.

1. Zus. $\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m = (a^m)^{\frac{1}{n}}$, d. h. die Reihenfolge, in welcher man eine Zahl potenzirt und extrahirt ist willkürlich.

2. Zus. $(\sqrt{a})^2 = a$, hingegen $\sqrt{a}\,.\,\sqrt{a} = \pm a$ oder $(9^{1/2})^2 = 9$, aber $9^{1/2}\,.\,9^{1/2} = \pm 3.\pm 3 = \pm 9$, weil $+3.+3 = +9$ und $-3.-3 = +9$ und $+3.-3 = -9$ und $-3.+3 = -9$ giebt. Man muß daher das Multipliciren zweier Wurzeln mit einander und die zweite Potenz derselben Wurzel nicht gleichsetzen.

73. Lehrs. Eine Wurzel extrahirt man, indem man die Potenz hinschreibt, und zum Exponenten das Produkt der gegebenen Exponenten setzt.

$$\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^{\frac{1}{m}} = a^{\frac{1}{nm}} = \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}.$$

Bew. Sei $\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^{\frac{1}{m}} = a^x$, so ist $a^{\frac{1}{n}} = a^x\,.\,a^x\,.\,.\,.\,.\,.$ (m Fakt.) $= a^{mx}$, also $\frac{1}{n} = m\,x$ und $x = \frac{1}{nm}$; folglich $\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^{\frac{1}{m}} = a^{\frac{1}{nm}}$.

Zus. $\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^{\frac{1}{m}} = \left(a^{\frac{1}{m}}\right)^{\frac{1}{n}}$ d. h. die Ordnung, in welcher man hinter einander extrahirt, ist willkürlich.

31. Aufg. Produkte und Quotienten zu extrahiren.

Aufl. 1) $(12a^2b)^{1/2} = (4.3a^2b)^{1/2} = \pm 2a(3b)^{1/2} = \pm 2a\sqrt{3b}$.

2) $\sqrt[3]{-54a^3b^5} = \sqrt[3]{-27.2a^3b^3.b^2} = -3ab\sqrt[3]{2b^2} = -3ab(2b^2)^{1/3}$

3) $\sqrt{\frac{25x^2y^3}{72z^5}} = \sqrt{\frac{25x^2y^2.y}{36.2z^4.z}} = \pm\frac{5xy}{6z^2}\sqrt{\frac{y}{2z}} = \pm\frac{5xy}{6z^2}\left(\frac{y}{2z}\right)^{1/2}$.

4) $\frac{3ab}{4x}\sqrt[3]{\frac{2a}{3b}} = \sqrt[3]{\frac{3^3a^3b^3\,.\,2a}{4^3x^3.3b}} = \sqrt[3]{\frac{9a^4b^2}{32x^3}}$.

32. Aufg. Potenzen zu extrahiren.

Aufl. 1) $\left(\frac{40a^3}{135b^6}\right)^{1/3} = \left(\frac{2^3\,.\,5a^3}{3^3.5.b^6}\right)^{1/3} = \frac{2a}{3b}$.

2) $\sqrt[3]{\left(\frac{36a^5b^8}{98c^{-4}d^{12}}\right)^{-2}} = \left(\frac{3^2.2^2\,a^5b^8}{7^2.2.c^{-4}d^{12}}\right)^{-2/3} = \frac{3^{-4/3}2^{-2/3}a^{-10/3}b^{-16/3}}{7^{-4/3}c^{8/3}d^{-8}}$

$= \frac{7.7^{1/3}d^8}{3.3^{1/3}.2^{2/3}.a^3.a^{1/3}b^5b^{1/3}} = \frac{7d^8}{3a^3b^5}\left(\frac{7}{12ab}\right)^{1/3} = \frac{7d^8}{3a^3b^5}\sqrt[3]{\frac{7}{12ab}}.$

3) $\left(-\frac{225a^{-6}b^8xz^3}{189a^2b^{-4}x^{10}}\right)^{-2/3} = \left(-\frac{5^3.3^2.a^{-6}b^8xz^3}{3^3.7a^2b^{-4}x^{10}}\right)^{-2/3} = \left(-\frac{5^2.a^{-8}b^{12}x^{-9}z^3}{3.7}\right)$

$= \frac{5^{-4/3}\,a^{16/3}\,b^{-8}\,x^6z^{-2}}{3^{-2/3}\,7^{-2/3}} = \frac{a^5x^6}{5b^8z^2}\sqrt[3]{\frac{3^2.7^2.a}{5}}.$

(Aufg. Smlg. § 19. 10—52.)

33. Aufg. Aus einem Polynom die Quadratwurzel zu ziehen.

Aufl. 1) Man ordne das gegebene Polynom nach einem Buchstaben so, daß die höheren Potenzen desselben immer vorangehen; bestimme aus seinem ersten Gliede die zweite Wurzel, welche dann das erste Glied der gesuchten Wurzel sein wird, erhebe diesen gefundenen Theil zur zweiten Potenz und ziehe ihn vom Polynom ab.

2) Man dividire den Rest durch das Doppelte des gefundenen ersten Theiles, so ist der Quotient der zweite Theil der verlangten Wurzel; hierauf ergänze man den Divisor, indem man zu demselben den gefundenen zweiten Theil addirt und ziehe das Produkt dieser Summe mit dem zweiten Theile der Wurzel von jenem Reste ab. Bleibt ein Rest übrig, so ist die Wurzel des gegebenen Polynoms entweder irrational oder es enthält eine aus mehr als zwei Theilen bestehende zweite Wurzel. Im letzteren Falle betrachte man die gefundenen Theile zusammengenommen als ersten Theil und fahre wie vorhin fort, um ihre folgenden Theile zu finden.

z. B. 1) $(9x^2-42xy+49y^2)^{1/2} = \pm(3x-7y)$

$(3x)^2 = 9x^2$

$2.3x \mid -42xy$

$(6x-7y).-7y = -42xy+49y^2$

2) $\sqrt{9/4+6x-17x^2-28x^3+49x^4} = \pm(3/2+2x-7x^2)$

$(3/2)^2 = 9/4$

$2.3/2 \mid 6x$

$(3+2x)2x = 6x+4x^2$

$2.(3/2+2x) \mid -21x^2-28x^3$

$(3+4x-7x^2).-7x^2 = -21x^2-28x^3+49x^4.$

Bew. Da $(a \pm b)^2 = a^2 + (\pm 2a + b)\, b$ ist, so ist umgekehrt $\sqrt{a^2 \pm 2ab + b^2} = \pm (a \pm b)$.

1. Zus. Enthält die Potenz die Form $a^2 \pm 2ab + b^2$, wo a und b auch Polynome sein können, so ist die Wurzel rational. Fehlt ein Glied oder ist ein Glied nicht von der angegebenen Form oder zu viel, so entsteht eine irrationale Wurzel.

2. Zus. Wenn $x^2 + y^2$ nicht die zweite Potenz einer rationalen Zahl (z^2) ist, so giebt $\sqrt{x^2+y^2}$ eine irrationale Wurzel.

z. B. 1) $\sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = \pm 5$;

$$2)\ \sqrt{x^2+y^2} = \pm\left(x + \frac{y^2}{2x} - \frac{y^4}{8x^3} + \frac{y^6}{16x^5} \ldots\ldots\right)$$

$$x^2$$

$$2x \mid y^2$$

$$\left(2x + \frac{y^2}{2x}\right)\frac{y^2}{2x} = y^2 + \frac{y^4}{4x^2}$$

$$2x + \frac{y^2}{x} \;\Big|\; -\frac{y^4}{4x^2}$$

$$\left(2x + \frac{y^2}{x} - \frac{y^4}{8x^3}\right) \cdot -\frac{y^4}{8x^3} = -\frac{y^4}{4x^2} - \frac{y^6}{8x^4} + \frac{y^8}{64x^6}$$

$$2x + \frac{y^2}{x} - \frac{y^4}{4x^3} \;\Big|\; \frac{y^6}{8x^4} - \frac{y^8}{64x^6}$$

$$\left(2x + \frac{y^2}{x} - \frac{y^4}{4x^3} + \frac{y^6}{16x^5}\right)\frac{y^6}{16x^5} = \frac{y^6}{8x^4} + \frac{y^8}{16x^6} + \frac{y^{10}}{64x^8} - \frac{y^{12}}{256x^{10}}$$

$$-\frac{5y^8}{64x^6} + \frac{y^{10}}{64x^8} - \frac{y^{12}}{256x^{10}}.$$

3. Zus. Soll aus einer dekadischen Zahl die zweite Wurzel gezogen werden, so verfahre man ebenso wie mit Buchstaben.

z. B. $\sqrt{900+300+25} = 30+5$

$$900$$

$$60 \mid 300$$

$$(60+5)5 = 300+25.$$

Oder ist die Addition der Potenz ausgeführt, als $\sqrt{1225}$, so theile man die Zahl von der Rechten zur Linken zu je zwei Ziffern ab, weil das Quadrat der Zehner der Wurzel aus dem Quadrat der Zahl der Zehner und zwei Nullen besteht, das Quadrat der Hunderte der Wurzel aus dem Quadrate der Zahl der Hunderte und vier Nullen u. s. w.; folglich enthält 12 das Quadrat der Zahl der Zehner, außerdem aber noch die durch die übrigen Theile des Quadrats hervorgebrachten Hunderte.

z. B. 1) $\sqrt{12 \mid 25} = 35$

9

$6 \mid 325$

$65 . 5 = 325$

2) $\sqrt{3 \mid 17 \mid 90 \mid 89} = 1783$

1

$2 \mid 21$

$27 . 7 = 189$

$34 \mid 289$

$348 . 8 = 2784$

$356 \mid 1068$

$3563 . 3 = 10689$

Um zu erkennen, ob ein in der Wurzel gefundener Theil zu klein sei, muß mnn den Rest prüfen. Es sei a das erste Glied der Wurzel und α der erste Rest, so muß $\alpha < 2a + 1$ sein; denn wäre $\alpha = 2a + 1$, so würde man von dem ersten Gliede der gegebenen Zahl $a^2 + 2a + 1 = (a + 1)^2$ subtrahiren können, also müßte dieses Glied der Wurzel um 1 vergrößert werden, u. s. w. (Aufg. Sammlg. § 20. 2—19).

Wird aus einem Decimalbruche die zweite Wurzel gezogen, so muß er immer eine gerade Anzahl von Ziffern enthalten, und ist die Anzahl der Ziffern eine ungerade, so hängt man eine Null an (wodurch der Werth des Bruches nicht geändert wird); denn das Quadrat von $^1/_{10}$ hat im Nenner eine Eins mit 2 Nullen, von $^1/_{100}$ im Nenner eine Eins mit 4 Nullen u. s. w. z. B. $\sqrt{28,\ 59 \mid 70 \mid 30} = 5,347 \ldots$ Zieht man aus einem gemeinen Bruche die zweite Wurzel, so extrahire man den Zähler und Nenner, wenn sie rationale Wurzel geben, als $\sqrt{^9/_{16}} = \pm\, ^3/_4$, wenn nicht, so verwandele man diesen Bruch in einen Decimalbruch und ziehe dann die Quadratwurzel, z. B. $\sqrt{^5/_{12}} = \sqrt{0,4166\ldots} = 0,645497\ldots$, oder man multiplicire Zähler und Nenner mit dem Nenner des Bruches, so wird die Wurzel des Nenners rationel, z. B.

$$\sqrt{^5/_{12}} = \sqrt{^{60}/_{144}} = {^1/_{12}}\sqrt{60} = \frac{7,745967\ldots}{12} = 0,645497\ldots$$

34. Aufg. Aus einer unvollständigen Quadratzahl die Quadratwurzel annähernd durch Abkürzung zu bestimmen.

Aufl. Will man die Quadratwurzel z. B. auf 8 Decimalstellen genau bestimmen, so extrahire man nach dem gewöhnlichen Verfahren auf 4 Decimalstellen, nehme dann das Doppelte der bereits gewonnenen Quadratwurzel und dividire nach der abgekürzten Division in den Rest hinein, so sind die 4 folgenden Decimalstellen noch genau. z. B.

$\sqrt{2} = 1,41421356 \ldots.$

```
       1
    ------
   24/100
       96
    --------
   281/400
       281
    --------
  2824/11900
       11296
      --------
  28282/60400
        56564
       --------
  28284/3836
        2828
       --------
        1008
         848
       --------
         160
         141
       --------
          19
          17
       --------
```

Bew. Sei die Quadratzahl A, die Quadratwurzel auf 4 Decimalstellen a, der Rest r und die folgenden Decimalstellen der Quadratwurzel x, so ist $A = (a + x)^2$, also $A - a^2 = 2ax + x^2$; nun ist $A - a^2 = 2ax + x^2$; nun ist $A - a^2 = r$ und x ein kleiner Bruch, also x^2 eine noch kleinere Zahl, daher kann man es weglassen, folglich ist $x = \frac{r}{2a}$.

35. Aufg. Aus einem Polynom die Cubikwurzel zu ziehen.

Aufl. Man ordne das gegebene Polynom nach Aufg. 33 und ziehe aus dem ersten Gliede desselben die dritte Wurzel, so ist diese der erste Theil der verlangten Wurzel; 2) Subtrahire hierauf die dritte Potenz des gefundenen Wurzeltheiles von dem Polynome und dividire den Rest durch das dreifache Quadrat desselben, so ist der Quotient der zweite Theil der Wurzel; 3) Subtrahire dann das dreifache Produkt des Quadrats des ersten Theils mit dem zweiten nebst dem dreifachen Produkt des ersten Theils mit dem Quadrat des zweiten und die dritte Potenz des zweiten Theiles von dem bei 2) erwähnten Reste. Man verfahre ebenso mit dem zweiten Reste, indem man die beiden gefundenen Theile als einen Theil der Wurzel betrachtet, wodurch sich ihre folgenden Theile ergeben. Bleibt zuletzt kein Rest übrig, so ist die dritte Wurzel rational, sonst irrational.

z. B. 1) $(8x^6-36x^4y^3+54x^2y^6-27y^9)^{1/3}=2x^2-3y^3$

$(2x^2)^3=8x^6$

$3.(2x^2)^2 \mid -36x^4y^3$

$3(2x^2)^2.-3y^3+3.2x^2(-3y^3)^2-(3y^3)^3=-36x^4y^3+54x^2y^6-27y^9$

2) $\sqrt[3]{\frac{27}{8}+\frac{27}{2}x-\frac{117}{4}x^2-118x^3+\frac{273}{2}x^4+294x^5-343x^6}$

$\left(\frac{3}{2}\right)^3=\frac{27}{8}$ $=\frac{3}{2}+2x-7x^2$

$3\left(\frac{3}{2}\right)^2 \Big| \frac{27}{2}x$

$3.\left(\frac{3}{2}\right)^2.2x+3.\frac{3}{2}(2x)^2+(2x)^3=\frac{27}{2}x+18x^2+8x^3$

$3.\left(\frac{3}{2}+2x\right)^2 \Big| -\frac{189}{4}x^2-126x^3+\frac{273}{2}x^4$

$3.\left(\frac{3}{2}+2x\right)^2.-7x^2+3.\left(\frac{3}{2}+2x\right).(-7x^2)^2+(-7x^2)^3$

$=-\frac{189}{4}x^2-126x^3+\frac{273}{2}x^4+294x^5-343x^6.$

Bew. Da $(a\pm b)^3=a^3\pm 3a^2b+3ab^2\pm b^3$, so ist umgekehrt $a\pm b=\sqrt[3]{a^3\pm 3a^2b+3ab^2\pm b^3}$.

1. Zus. Wie 33. Aufg., 1. Zus.

2. Zus. Soll aus einer dekadischen Zahl die dritte Wurzel gezogen werden, so verfahre man wie mit Buchstaben und berücksichtige dabei 33. Aufg., 3. Zus. z. B.

1) $\sqrt[3]{21 \mid 952}=28$

$2^3=8$

$3.2^2 \mid 139$

$8.12=96$

435

$3.2.8^2=384$

512

$8^3=512$

2) $\sqrt[3]{5,800 \mid 000}=1,79\,..$

1

$3.1^2 \mid 48$

$3.7=21$

270

$3.1.49=147$

1230

$7^3=343$

$3.17^2 \mid 8870$

7803

10670

$3.17.81=4131$

65390

$9^3=729$

......

(Aufg. Smlg. § 20. 20—36).

Um zu erkennen, ob ein in der Cubikwurzel gefundener Theil zu klein sei, muß man auch hier den Rest prüfen. Es sei a der erste Theil der Wurzel und α der Rest, so muß $\alpha < 3a^2 + 3a + 1$ sein; denn wäre $\alpha = 3a^2 + 3a + 1$, so würde von dem ersten Theile der gegebenen Zahl $a^3 + 3a^2 + 3a + 1 = (a + 1)^3$ subtrahirt werden können, also müßte der erste Theil der Wurzel um 1 vergrößert werden; u. s. w.

Zus. 3. Wird aus $(a + b)$ die nte Wurzel gezogen, so entsteht eine Reihe nach dem binomischen Lehrsatze:

$$(a+b)^{\frac{1}{n}} = a^{\frac{1}{n}} + \frac{1}{n} a^{\frac{1}{n}-1} b + \frac{\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}-1\right)}{1.2} a^{\frac{1}{n}-2} b^2 + \frac{\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}-1\right)\left(\frac{1}{n}-2\right)}{1.2.3} a^{\frac{1}{n}-3} b^3 \ldots.. $$ [11])

36. Aufg. Aus einer unvollständigen Cubikzahl die Cubikwurzel annähernd durch Abkürzung zu bestimmen.

Aufl. Soll die Cubikwurzel auf m Decimalstellen bestimmt werden, so extrahire man nach dem gewöhnlichen Verfahren auf $\frac{m}{2}$ Decimalstellen, nehme das Quadrat der Cubikwurzel dreimal und dividire nach der abgekürzten Division in den Rest hinein, so sind die $\frac{m}{2}$ folgenden Decimalstellen noch genau. z. B.

$$\sqrt[3]{2} = 1,2599218 \ldots$$

```
          1
       3/1000
          728
     432/272000
         225125
   46875/46875000
           42491493
 4755243/4383507
         4279719
          103788
           95105
            8683
            4755
            3928
            3804
```

[11]) Der Beweis kann hier nicht geführt werden. Damit die Reihe convergirt, macht man das zweite Glied kleiner als 1. Es sei $a > b$, so ist $(a + b) =$ $a\left(1 + \frac{b}{a}\right)$ und $(a+b)^{\frac{1}{n}} = a^{\frac{1}{n}}\left(1 + \frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{n}} = a^{\frac{1}{n}}\left(1 + \frac{1}{n}\left(\frac{b}{a}\right) + \frac{\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}-1\right)}{1.2}\left(\frac{b}{a}\right)^2 \ldots\right.$

Bew. Es sei $\sqrt[3]{A}$ bis auf eine bestimmte Anzahl von Decimalstellen nach dem vorigen Verfahren berechnet, der gefundene Theil sei a, der fehlende x und der Rest r, so ist:
$A=(a+x)^3$, also $A-a^3=3a^2x+3ax^2+x^3$. Ist x ein sehr kleiner Bruch, so ist x^2 eine noch viel kleinere Zahl und noch kleiner x^3, so daß die höheren Potenzen von x weggelassen werden können; dann erhält man, da $A-a^2=r$ ist: $x=\frac{r}{3a^2}$.

(Aufg. Samml. § 21. 1—53).

37. Aufg. Wurzeln zu addiren und subtrahiren.

Aufl. Nur gleichnamige Wurzeln können addirt und subtrahirt werden, indem man ihre Coefficienten addirt und subtrahirt und zu dem so gewonnenen Coefficienten die Wurzel einmal als Faktor schreibt. z. B.

1) $3.5^{1/2}-6.2^{1/3}-2.5^{1/2}+7.2^{1/3}+3.5^{1/2}-4.2^{1/3}=3.5^{1/2}-6.2^{1/3}$

$$-2.5^{1/2}+7.2^{1/3}$$
$$3.5^{1/2}-4.2^{1/3}$$
$$\overline{4.5^{1/2}-3.2^{1/3}}.$$

2) $-3\sqrt{a}-8\sqrt[3]{b}+6\sqrt[4]{a}-(-3\sqrt{a}+4\sqrt[3]{b}-\sqrt[4]{a}+\sqrt[5]{c})$
$=-12\sqrt[3]{b}+7\sqrt[4]{a}-\sqrt[5]{c}$.

Oft können die ungleichnamigen Wurzelzahlen zu gleichnamigen gemacht werden, wenn man die Potenzen in solche Faktoren zerlegen kann, daß ein Faktor, aus dem die Wurzel nicht genau gezogen werden kann, in allen Wurzelzahlen von gleichen Exponenten derselbe ist, während aus dem andern Faktor der Potenzen sich die Wurzel genau ziehen läßt. z. B.

1) $24^{1/2}-3.96^{1/2}+7.54^{1/2}-6^{1/2}=(4.6)^{1/2}-3.(16.6)^{1/2}+7.(9.6)^{1/2}$
$-6^{1/2}=2.6^{1/2}-3.4.6^{1/2}+7.3.6^{1/2}-6^{1/2}=2.6^{1/2}-12.6^{1/2}+21.6^{1/2}$
$-6^{1/2}=10.6^{1/2}=10\sqrt{6}$.

2) $\sqrt{2ax^2-4ax+2a}=\sqrt{(x-1)^2.2a}=(x-1)\sqrt{2a}$.
(Aufg. Sammlg. § 22. 2—47.)

38. Aufg. Wurzeln mit einander zu multipliciren.

Aufl. (69. Lehrs.)

z. B. 1) $a^{1/2}.a^{1/3}=a^{5/6}=\sqrt[6]{a^5}$.

2) $(a^{1/5}b^{3/5}+3a^{-4/5}b^{8/5}).(a^{1/2}b^{1/2}+2a^{-1/2}b^{-3/2})$

$= a^{7/10}b^{11/10}+2a^{-3/10}b^{-9/10}+3a^{-3/10}b^{21/10}+6a^{-13/10}b^{1/10}$

$= (ab+2b^{-1}+3b^2+6a^{-1})\,(ba^{-3})^{1/10}$.

3) $$\begin{array}{rl} (4+5\sqrt{3})(7-2\sqrt{3}) = & 28+35\sqrt{3} \\ & -30-\ 8\sqrt{3} \\ \hline & -\ 2+27\sqrt{3}. \end{array}$$

4) $$\begin{array}{rl} (2\sqrt{3}-4\sqrt[3]{9})(5\sqrt{3}+6\sqrt[3]{9}) = & 30-60\sqrt[6]{3} \\ & \quad +36\sqrt[6]{3}-72\sqrt[3]{3} \\ \hline & 30-24\sqrt[6]{3}-72\sqrt[3]{3}. \end{array}$$

(Aufg. Sammlg. § 23. 1—70.)

39. Aufg. Wurzeln durch einander zu dividiren.

Aufl. (71. Lehrs.) z. B. 1) $20\sqrt[3]{5} : 5\sqrt[4]{125} = 4\sqrt[12]{5^{-5}} = \frac{4}{\sqrt[12]{5^5}}$

2) $$\begin{array}{l|l|l} a^{1/2}-b^{1/3} & a^3-2a^{1/2}b^{3/4}-a^{5/2}b^{1/3}+2b^{13/12} & = a^{5/2}-2b^{3/4} \\ & a^3 \qquad\qquad\quad -a^{5/2}b^{1/3} & \\ \hline & -2a^{1/2}b^{3/4} & \\ & -2a^{1/2}b^{3/4} \qquad +2b^{13/12} & \\ \hline \end{array}$$

3) $a^{1/n}-b^{1/n}\,\big|\,a-b\,\big| = a^{\frac{n-1}{n}}+a^{\frac{n-2}{n}}b^{\frac{1}{n}}+a^{\frac{n-3}{n}}b^{\frac{2}{n}}\ldots\ldots a^{\frac{1}{n}}b^{\frac{n-2}{n}}+b^{\frac{n-1}{n}}$

Oft macht man bei Monomen, ehe man dividirt, den Divisor rational, indem man den Dividenden und Divisor mit einer Wurzelzahl multiplicirt, welche zur Potenz die Potenz des Divisors hat, zum Bruchexponenten dagegen einen Bruch, dessen Zähler um 1 kleiner ist als sein Nenner, welch' letzterer gleich dem Nenner des Bruchexponenten im Divisor ist.

z. B. 4) $\dfrac{a^{\frac{1}{n}}}{b^{\frac{1}{m}}} = \dfrac{a^{\frac{1}{n}}b^{\frac{m-1}{m}}}{b^{\frac{1}{m}}b^{\frac{m-1}{m}}} = \dfrac{a^{\frac{1}{n}}b^{\frac{m-1}{m}}}{b}$

5) $\dfrac{a^{1/2}}{b^{1/3}} = \dfrac{a^{1/2}b^{2/3}}{b}$

Ist der Divisor ein Binom, dessen Glieder gleiche Wurzelexponenten haben oder ist ein Glied rational, so nehme man die Differenz dieser beiden Glieder, wenn der Divisor ihre Summe oder die Summe derselben, wenn der Divisor ihre Differenz ausdrückt, erhebe diesen veränderten Divisor zu einer Potenz, deren Exponent eine Einheit weniger enthält als der Wurzelexponent, lasse die Binomialcoefficienten (63. Lehrs.) weg und multiplicire mit dieser Zahl den gegebenen Dividenden und Divisor, so wird der neue Divisor rational sein. (39. Aufg. 3).

z. B. 6) $\frac{a}{\sqrt[4]{a} - \sqrt[4]{b}}$.

Man erhebe $a^{1/4} + b^{1/4}$ zur dritten (4—1) Potenz und lasse die Binomialcoefficienten weg, so erhält man $a^{3/4} + a^{1/2}\, b^{1/4} + a^{1/4}\, b^{1/2} + b^{3/4}$, mit dieser Zahl multiplicire man Dividend und Divisor, also

$$\frac{a(a^{3/4} + a^{1/2}\, b^{1/4} + a^{1/4}\, b^{1/2} + b^{3/4})}{(a^{1/4} - b^{1/4})(a^{3/4} + a^{1/2}\, b^{1/4} + a^{1/4}\, b^{1/2} + b^{3/4})}$$

$$= \frac{a^{7/4} + a^{3/2}\, b^{1/4} + a^{5/4}\, b^{1/2} + ab^{3/4}}{a - b}$$

7) $\frac{1}{2 - \sqrt[3]{4}}$

Man erhebe $2 + \sqrt[3]{4}$ zur zweiten (3—1) Potenz und lasse die Binomialcoefficienten weg, so erhält man $2^2 + 2\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{4^2}$,

also $\frac{1(2^2 + 2\sqrt[3]{4} + 2\sqrt[3]{2})}{(2 - \sqrt[3]{4})\,(2^2 + 2\sqrt[3]{4} + 2\sqrt[3]{2})} = \frac{4 + 2\sqrt[3]{4} + 2\sqrt[3]{2}}{8 - 4}$

$= 1 + \frac{1}{2}\sqrt[3]{4} + \frac{1}{2}\sqrt[3]{2}$.

8) $\frac{3 - \sqrt{5}}{\sqrt{3} - \sqrt{2}} = \frac{(3 - \sqrt{5})\ (\sqrt{3} + \sqrt{2})}{(\sqrt{3} - \sqrt{2})\,(\sqrt{3} + \sqrt{2})} = \frac{3\sqrt{3} - \sqrt{15} + 3\sqrt{2} - \sqrt{10}}{3 - 2}$

9) $\frac{a + b}{\sqrt{a - b}} = \frac{(a + b)\sqrt{a - b}}{a - b}$; 10) $\frac{a + b}{\sqrt{a^2 - \sqrt{b}}} = \frac{(a + b)\sqrt{a^2 - \sqrt{b}}}{a^2 - \sqrt{b}}$

$= \frac{(a + b)\,(a^2 + \sqrt{b})\ \sqrt{a^2 - \sqrt{b}}}{a^4 - b}$

Ist der Divisor dreitheilig, so setze man zwei Glieder des Divisors $= a$, und verfahre wie vorher.

$$11) \quad \frac{1-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}-\sqrt{5}}$$

Man nehme für $\sqrt{3}+\sqrt{2}=a$, so ist $\frac{1-\sqrt{2}}{a-\sqrt{5}}=\frac{(1-\sqrt{2})(a+\sqrt{5})}{(a-\sqrt{5})(a+\sqrt{5})}$

$$=\frac{a-a\sqrt{2}+\sqrt{5}-\sqrt{10}}{a^2-5}=\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}-\sqrt{6}-2+\sqrt{5}-\sqrt{10}}{2\sqrt{6}}$$

$$=\frac{\sqrt{18}+\sqrt{12}-6-2\sqrt{6}+\sqrt{30}-\sqrt{60}}{12}$$

$$=\tfrac{1}{4}\sqrt{2}+\tfrac{1}{6}\sqrt{3}-\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{6}\sqrt{6}+\tfrac{1}{12}\sqrt{30}-\tfrac{1}{6}\sqrt{15}.$$

(Aufg. Sammlg. § 24. 1—73.)

40. Aufg. Wurzeln zu potenziren.

Aufl. (72. Lehrs.). z. B. 1) $(a^{1/3})^5=a^{5/3}=a.a^{2/3}=a\sqrt[3]{a^2}$;

2) $(3^{1/2}+2^{1/2})^3=3\ 3^{1/2}+9.2^{1/2}+6.3^{1/2}+2.2^{1/2}=9.3^{1/2}+11.2^{1/2}$

3) $(2/_3\,x^{-5/12})^{-4}=\frac{2^{-4}x^{5/3}}{3^{-4}}=\frac{81x^{5/3}}{16}=\frac{81x}{16}\,x^{2/3}$;

4) $[(2x+a)^{1/2}+(2x-a)^{1/2}]^2=2x+a+2(2x+a)^{1/2}(2x-a)^{1/2}+2x-a$
$=4x+2(4x^2-a^2)^{1/2}$.

(Aufg. Sammlg. § 25. 1—38).

41. Aufg. Wurzeln zu extrahiren.

Aufl. (73. Lehrs.) z. B.

1) $9(6.28^{1/2})^{1/2}=9.6^{1/2}(4^{1/2}.7^{1/2})^{1/2}=9.6^{1/2}.2^{1/2}.7^{1/4}=9.12^{1/2}.7^{1/4}$
$=9.4^{1/2}.3^{1/2}.7^{1/4}=18.3^{1/2}.7^{1/4}=18(3^2.7)^{1/4}=18.63^{1/4}$
$=18\sqrt[4]{63}=18\sqrt{\sqrt{63}}$;

2) $\left(\frac{4a^{8/3}7^{2/3}}{25b^{4/3}}\right)^{-3/2}=\pm\frac{125b^2}{56a^4}$

Wenn man aus einem Binom von der Form $a\pm\sqrt{b}$ die zweite Wurzel zu ziehen hat, so kann diese Form vortheilhaft verändert werden, wenn $\sqrt{a^2-b}$ eine rationale Zahl giebt; man erhält dann

$$\sqrt{a \pm \sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}} \pm \sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}$$

Bew. Setzt man für $a = x + y$ und $\sqrt{b} = 2\sqrt{xy}$, so ist $a^2 = (x+y)^2$ und $b = 4xy$, daher $\sqrt{a^2 - b} = x - y$, folglich

$x = \frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}$ und $y = \frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}$, also $\sqrt{a \pm \sqrt{b}}$

$$= \sqrt{x \pm 2\sqrt{xy} + y} = \sqrt{x} \pm \sqrt{y} = \sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}} \pm \sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}$$

z. B. $\sqrt{7+4\sqrt{3}} = \sqrt{7+\sqrt{48}} = \sqrt{\frac{7+\sqrt{49-48}}{2}}$

$+ \sqrt{\frac{7-\sqrt{49-48}}{2}} = 2 + \sqrt{3}.$

(Anfg. Smlg. 26. 1—33).

Sätze über die Rechnungen mit imaginären Ausdrücken.

74. Lehrs. Es ist immer $\sqrt[2n]{-ab} = \sqrt[2n]{-a} \cdot \sqrt[2n]{b}$, wenn n eine ganze Zahl bedeutet.

Bew. Es sei $-a = -x^{2n} = x^{2n} \cdot -1$

und $b = y^{2n}$

so ist $-ab = (xy)^{2n} \cdot -1$

und $\sqrt[2n]{-ab} = xy \sqrt[2n]{-1}$

Nach dem Obigen ist $\sqrt[2n]{-a} = x \sqrt[2n]{-1}$

$\sqrt[2n]{b} \quad = y$

$\sqrt[2n]{-a} \cdot \sqrt[2n]{b} = xy \sqrt[2n]{-1}$

folglich $\sqrt[2n]{-ab} = \sqrt[2n]{-a} \cdot \sqrt[2n]{b}$.

Zus. $\sqrt[2n]{-a} = \sqrt[2n]{a \cdot -1} = \pm \sqrt[2n]{a} \sqrt[2n]{-1}$ und $\sqrt{-a} = \pm \sqrt{a} \sqrt{-1}$.

Daher bringt man jeden imaginären Ausdruck auf die Form $\sqrt{a}\sqrt{-1}$ zurück und folglich alle Rechnungen mit imaginären Ausdrücken auf Rechnungen mit $\sqrt{-1}$.

75. Lehrs. Die imaginären Zahlen werden mit einander multiplicirt oder durch einander dividirt wie die Wurzelausdrücke überhaupt.

Bew. Siehe Lehrs. 68—71. Daher ist

1) $(-1)^{1/2} . (-1)^{1/2} = (-1)^{1/2 + 1/2} = -1.$

2) $(-a)^{1/2} . (-b)^{1/2} = \pm a^{1/2} (-1)^{1/2} . \pm b^{1/2} (-1)^{1/2} = \pm a^{1/2} b^{1/2} . -1$

$= \mp (ab)^{1/2}$ oder $\sqrt{-a} . \sqrt{-b} = \mp \sqrt{ab}.$

(Aufg. Sammlg. § 19. 22, 42. § 22. 45, 46. § 23. 6—9, d, 12, g, h, 61—70. § 24. 68—73).

76. Lehrs. Wenn n eine ganze Zahl oder Null bedeutet, so ist immer:

1) $(\sqrt{-1})^{4n+2} = -1;$

2) $(\sqrt{-1})^{4n+3} = -\sqrt{-1};$

3) $(\sqrt{-1})^{4n} = +1;$

4) $(\sqrt{-1})^{4n+1} = +\sqrt{-1}.$

Bew. 1) Es ist $(\sqrt{-1})^2 = ((-1)^{1/2})^2 = -1$ und

$(\sqrt{-1})^6 = ((-1)^{1/2})^6 = (-1)^3 = -1$, und ebenso erhalte ich -1, wenn ich $\sqrt{-1}$ zur 10ten, zur 14ten u. s. w. Potenz erhebe. Nun kann man diese Zahlen 2, 6, 10, 14 u. s. w. durch die allgemeine Formel $4n+2$ ausdrücken, daher ist $(\sqrt{-1})^{4n+2} = -1.$

2) $(\sqrt{-1})^3 = ((-1)^{1/2})^3 = -1 . (-1)^{1/2} = -1 \sqrt{-1} = -\sqrt{-1}.$

Ebenso erhalte ich $-\sqrt{-1}$, wenn ich $\sqrt{-1}$ zur 7ten, 11ten u. s. w. Potenz erhalte, daher ist $(\sqrt{-1})^{4n+3} = -\sqrt{-1}.$

3) $(\sqrt{-1})^4 = ((-1)^{1/2})^4 = (-1)^2 = +1.$ Daher ist $(\sqrt{-1})^{4n} = +1.$

4) $(\sqrt{-1})^5 = ((-1)^{1/2})^5 = (-1)^2 . (-1)^{1/2} = +(-1)^{1/2} = +\sqrt{-1}.$

Daher ist $(\sqrt{-1})^{4n+1} = +\sqrt{-1}.$

42. Aufg. 1) $\sqrt[4]{-243a^5b^6} = \sqrt[4]{-3^4.3a^4b^4.ab^2} = \pm 3ab\sqrt[4]{-3ab^2}$

$= \pm 3ab \sqrt[4]{3ab^2} . \sqrt[4]{-1}.$

2) $(\sqrt{-2}+5\sqrt{-3}).(\sqrt{-2}-4\sqrt{-3})$

$=(\sqrt{2}+5\sqrt{3})(\sqrt{2}-4\sqrt{3}).\sqrt{-1}.\sqrt{-1}$

$=(-58+\sqrt{6}).-1=58-\sqrt{6}.$

3) $(a\sqrt{-1})^7+(b\sqrt{-1})^8=b^8-a^7\sqrt{-1}.$

4) $(a\pm b\sqrt{-1})^2=a^2\pm 2ab\sqrt{-1}-b^2.$

5) $(a+b\sqrt{-1})(a-b\sqrt{-1})=a^2+b^2.$

6) $\sqrt{a\pm b\sqrt{-1}}=\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}}\pm\sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2+b^2}}{2}}$

Man setze für $a=x+y$

$b\sqrt{-1}=2\sqrt{xy}$

$a+b\sqrt{-1}=x+2\sqrt{xy}+y=(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2.$

Es ist aber auch $a^2=(x+y)^2$

$-b^2=4xy$

$a^2+b^2=(x-y)^2$ und $\sqrt{a^2+b^2}=x-y.$

Nun ist $x+y=a$

$x-y=\sqrt{a^2+b^2}$

$$x=\frac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}$$

$$y=\frac{a-\sqrt{a^2+b^2}}{2}$$

folglich $\sqrt{a\pm b\sqrt{-1}}=\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}}\pm\sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2+b^2}}{2}}.$

(Aufg. Sammlg. § 25. 3, 24—32, 35, 36. § 26. 31, 32, 33.)

Fünfter Abschnitt.

Von den Logarithmen [12]).

Anmerkung. Man kann nur von unbenannten Zahlen Logarithmen nehmen.

§ 42. Erklärung. Werden die Logarithmen der natürlichen Zahlen von 1 bis zu einer beliebigen Zahl für irgend eine Grundzahl berechnet, und für den Gebrauch in bequemer tabellarischer Ordnung zusammengestellt, so nennt man diese Zusammenstellung ein Logarithmensystem.

Für die Grundzahl 4 z. B. ist der

$\log 1 = 0,$ weil $4^0 = 1$

$\log 2 = 1/2 = 0{,}5$ „ $4^{1/2} = 2$

$\log 4 = 1,$ „ $4^1 = 4$

$\log 8 = 3/2 = 1{,}5$ „ $4^{3/2} = 8$

$\log 16 = 2,$ „ $4^2 = 16$

$\log 32 = 5/2 = 2{,}5$ „ $4^{5/2} = 32$

$\log 64 = 3,$ „ $4^3 = 64$ u. s. w.

1. Folgerung. Die Basis muß immer eine positive Zahl sein; ist sie negativ, so wird die natürliche Zahl bald positiv, bald negativ, bald reell, bald imaginär, als $(-a)^{2n} = A$, $(-a)^{2n+1} = -B$, $(-a)^{\frac{1}{2n}} = C\sqrt{-1}$; doch darf die Basis nicht 1 sein, weil die Potenzen von 1 wieder 1 sind. Nimmt man zur Basis eine Zahl, die kleiner als 1 ist, so würde dieses viel Unbequemes haben, denn alle Potenzen eines ächten Bruches sind wieder ächte Brüche; es könnte also diese Basis mit einem positiven Exponenten (Logarithmus) nie 1 oder größer als 1 werden. Man würde also bei einem solchen Logarithmensysteme für negative Logarithmen Zahlen erhalten, die größer als die Einheit wären. Da es aber

[12]) Die Erfindung der Logarithmen verdankt man dem Baron Neper de Merchinton, geb. 1550, gest. 1618.

in mancher Hinsicht unbequem ist, für ganze Zahlen negative Logarithmen zu erhalten, so wählt man keinen ächten Bruch zur Basis eines Logarithmensystems. Die Basis muß daher immer eine positive Zahl und größer als 1 sein. Der Exponent oder Logarithmus kann eine ganze oder gebrochene, eine positive oder negative Zahl enthalten, z. B. $10^{0,4771213} = 3$ oder $\overset{10}{\log}\ 3 = 0,4771213$. Der Sinn dieses Ausdrucks ist folgender: $10^{0,4771213}$ ist $= 10^{\frac{4771213}{10000000}}$, d. h. ich müßte die Zahl 10 auf die 4771213te Potenz erheben, und dann daraus die 10000000te Wurzel ziehen. Könnte man diese Arbeit wirklich ausführen, wozu auf dem gewöhnlichen Wege vielleicht mehr als ein Menschenleben erforderlich wäre, so würde man in der That finden, daß $10^{0,4771213}$ fast gleich 3 ist.

2. Folgerung. Für dieselbe Grundzahl gehören zu gleichen Zahlen auch gleiche Logarithmen und von zwei ungleichen Zahlen hat bei einer Grundzahl, die positiv und größer als 1 ist, die größere Zahl auch den größeren Logarithmen.

3. Folg. Ist die Basis einmal bestimmt, so hat jede Zahl nur einen einzigen Logarithmen; ändert sich aber die Basis, so ändert sich auch der Logarithmus jeder Zahl. z. B.

$$9^2 = 81, \text{ so ist } \overset{9}{\log}\ 81 = 2$$
$$3^4 = 81, \text{ „ „ } \overset{3}{\log}\ 81 = 4$$
$$5^2 = 25, \text{ „ „ } \overset{5}{\log}\ 25 = 2$$
$$6^2 = 36, \text{ „ „ } \overset{6}{\log}\ 36 = 2$$
$$7^2 = 49, \text{ „ „ } \overset{7}{\log}\ 49 = 2.$$

4. Folg. Der Logarithmus einer negativen Zahl ist für eine positive Grundzahl unmöglich.

5. Folg. Der Logarithmus von 1 ist für jede Grundzahl gleich Null.

6. Folg. Der Logarithmus der Grundzahl selbst ist für jede Grundzahl gleich 1.

77. Lehrs. In jedem logarithmischen Systeme ist der Logarithmus eines Produkts gleich der Summe der Logarithmen der einzelnen Faktoren. $\log (bcd) = \log b + \log c + \log d$.

Bew. Es sei die Grundzahl eines Logarithmensystems $= a$, und

$$\begin{array}{r|l} a^x = b, & \text{so ist } x = \overset{a}{\log}\ b \\ a^y = c, & y = \overset{a}{\log}\ c \\ a^z = d, & z = \overset{a}{\log}\ d \\ \hline a^{x+y+z} = bcd, & x+y+z = \overset{a}{\log}\ b + \overset{a}{\log}\ c + \overset{a}{\log}\ d \end{array}$$

Aus $a^{x+y+z} = bcd$ folgt $x + y + z = \overset{a}{\log}(bcd)$, folglich $\overset{a}{\log}(bcd) = \overset{a}{\log} b + \overset{a}{\log} c + \overset{a}{\log} d$.

Zus. Die Multiplication zweier oder mehrerer Zahlen verwandelt sich bei der Berechnung mit Logarithmen in eine Addition ihrer Logarithmen.

78. Lehrs. In jedem logarithmischen System ist der Logarithmus eines Quotienten gleich dem Logarithmus des Dividenden weniger dem Logarithmus des Divisors. $\log \frac{b}{c} = \log b - \log c$.

Bew. Es sei $a^x = b$, $a^y = c$, so ist $a^{x-y} = \frac{b}{c}$ und $x - y = \overset{a}{\log}\frac{b}{c}$, folglich $\overset{a}{\log}\frac{b}{c} = \overset{a}{\log} b - \overset{a}{\log} c$.

1. Zus. Die Division zweier Zahlen verwandelt sich bei der Berechnung mit Logarithmen in eine Subtraktion ihrer Logarithmen.

2. Zus. Die Logarithmen der ächten Brüche sind negativ und zwar immer gleich dem negativen Logarithmus der umgekehrten Zahl. z. B.

1) $\log {}^5/_7 = \log 5 - \log 7 = -(\log 7 - \log 5) = -\log {}^7/_5$.

2) $\log {}^1/_7 = \log 1 - \log 7 = -(\log 7 - \log 1) = -\log 7$ (§ 42. 5. Folg.)

3) $\log \frac{1}{c} = -\log c$.

79. Lehrs. Der Logarithmus einer Potenz ist gleich dem Exponenten, multiplicirt mit dem Logarithmus der Wurzel; der Exponent mag positiv oder negativ sein. $\overset{a}{\log} b^{\pm n} = \pm n \overset{a}{\log} b$.

Bew. Es sei die Grundzahl $= a$ und $a^x = b$, also $x = \overset{a}{\log} b$. Erhebt man diese Potenz $a^x = b$ zur $\pm n$ ten Potenz, so erhält man $(a^x)^{\pm n} = a^{\pm nx} = b^{\pm n}$, und $\pm nx = \overset{a}{\log} b^{\pm n}$, folglich $\overset{a}{\log} b^{\pm n} = \pm n \overset{a}{\log} b$.

Zus. Die Potenzirung einer Zahl verwandelt sich bei der Berechnung mit Logarithmen in eine Multiplication ihres Logarithmus mit dem Exponenten.

80. Lehrs. Der Logarithmus einer Wurzel ist gleich dem Logarithmus der Potenz dividirt durch den Wurzelexponenten.

$$\overset{a}{\log} \sqrt[n]{b} = \frac{\overset{a}{\log} b}{n}.$$

Bew. Es sei $a^x = b$, also $x = \overset{a}{\log} b$. Zieht man aus $a^x = b$ die nte Wurzel, so erhält man $(a^x)^{\frac{1}{n}} = b^{\frac{1}{n}} = a^{\frac{x}{n}}$, mithin $\frac{x}{n} = \overset{a}{\log} b^{\frac{1}{n}} = \overset{a}{\log} \sqrt[n]{b}$; also $\overset{a}{\log} \sqrt[n]{b} = \frac{1}{n} \overset{a}{\log} b$.

Zus. Die Ausziehung einer Wurzel verwandelt sich bei der Berechnung mit Logarithmen in eine Division des Logarithmus der Potenz durch den Wurzelexponenten.

81. Lehrs. Der Exponent einer Potenz wird gefunden, wenn man den Logarithmus der Potenz durch den Logarithmus der Wurzel dividirt.

$$b^x = d, \text{ folglich } x = \frac{\overset{a}{\log} d}{\overset{a}{\log} b}.$$

Bew. Es sei a die Basis, b eine beliebige Zahl und $b^x = d$, so ist

$\overset{a}{\log} b^x = \overset{a}{\log} d$ oder $x \overset{a}{\log} b = \overset{a}{\log} d$,

folglich $x = \frac{\overset{a}{\log} d}{\overset{a}{\log} b}$.

43. Aufg. Man soll die Logarithmen aller positiven ganzen Zahlen für die Basis a, die positiv und größer als 1 ist, berechnen.

Aufl. Man suche z. B. den Logarithmus der Zahl A für die Grundzahl a. Entweder ist nun eine Potenz von a gleich A oder A liegt zwischen zwei Potenzen von a, welche beide Potenzen a^n und a^m heißen mögen, so daß $A > a^m$ und $< a^n$. Man suche nun zwischen den Zahlen a^n und a^m die mittlere Proportionalzahl, also $a^n : x = x : a^m$, so ist $x = a^{\frac{n+m}{2}}$. Diese Zahl ist entweder der Zahl A gleich, dann ist $\frac{n+m}{2} = \overset{a}{\log} A$, oder von ihr verschieden. Wäre $a^{\frac{n+m}{2}}$ der Zahl A nicht gleich, so ist sie entweder größer oder kleiner. Im ersten Falle liegt dann der Werth von A zwischen $a^{\frac{n+m}{2}}$ und a^m, im zweiten Falle zwischen a^n und $a^{\frac{n+m}{2}}$. Wäre die Zahl zwischen a^n und $a^{\frac{n+m}{2}}$ enthalten, so suche man abermals die mittlere Proportionalzahl, also $a^n : y = y : a^{\frac{n+m}{2}}$; folglich $y = a^{\frac{3n+m}{4}}$.

Setzt man dieses Verfahren fort, so muß man nothwendig einmal auf eine mittlere Zahl kommen, die entweder der Zahl A vollkommen gleich, oder von ihr um etwas so Kleines unterschieden ist, daß man dieses letztere weglassen und die Zahl selbst für A nehmen kann. Dieser letzte Exponent von a wird dann der Logarithmus von A sein.

Die gemeinen Logarithmen.

§ 43. Erklärung. Die gewöhnlichen logarithmischen Tafeln, welche bei dem praktischen Rechnen am häufigsten gebraucht werden, enthalten die gemeinen oder sogenannten Briggischen Logarithmen [13]).

Diese Logarithmen sind für die Grundzahl 10 berechnet.

z. B. $10^0 = 1$, daher $\log 1 = 0$
$10^1 = 10$, " $\log 10 = 1$
$10^2 = 100$, " $\log 100 = 2$
$10^3 = 1000$, " $\log 1000 = 3$
⋮
$10^n = 100....$, " $\log 10^n = n$.

Folg. Die Logarithmen von 2 bis 9 liegen zwischen 0 und 1, sind also ächte Brüche, die Logarithmen aller zweistelligen Zahlen bestehen aus 1 und einem ächten Bruche (der Bruch kann auch 0 sein), der dreistelligen aus 2 und einem ächten Bruche und der $(n+1)$ stelligen aus n und einem ächten Bruche.

§ 44. Man nennt in dem Briggischen System die zu einem Logarithmen gehörige ganze Zahl die Charakteristik (Kennziffer) und den angehängten Bruch (den Decimalbruch) die Mantisse des Logarithmen.

1. Folg. In dem Briggischen System ist die Charakteristik eines Logarithmen immer nur um 1 kleiner als die Anzahl der Ziffern (Stellen) in der zugehörigen Zahl und umgekehrt, die zu einem Logarithmen gehörige Zahl enthält immer eine Ziffer (Stelle) mehr als die Charakteristik Einheiten hat. Daher brauchen die Tafeln dieser Logarithmen nur die verschiedenen Mantissen zu enthalten.

2. Folg. Aus Lehrs. 77—80 ergiebt sich, daß man nur die Logarithmen der Primzahlen zu berechnen hat.

44. Aufg. Den Logarithmen der Zahl 5 zu berechnen.

Aufl. Wenn $c = \sqrt{ab}$, so ist $\log c = \frac{\log a + \log b}{2}$ oder der Logarithmus des geometrischen Mittels zweier Zahlen ist gleich dem arithmetischen Mittel ihrer Logarithmen. Dieser Satz giebt uns ein Mittel an

---

[13]) Heinrich Briggs (geb. 1556, gest. 1630), Professor der Mathematik am Gresham-College in London, nahm zur Basis 10 an.

Für die höhere Analysis sind die natürlichen oder Neperschen (auch hyperbolischen) Logarithmen für die irrationale Basis $e = 2{,}7182818\ldots$ wichtig.

die Hand, den Logarithmen jeder beliebigen Zahl (durch Näherung) zu finden. Gesetzt die Zahl läge zwischen 1 und 10 und sei 5, so ist das geometrische Mittel derselben $= \sqrt{10} = 3{,}1622\ldots$ und der Logarithmus dieser Zahl $= 0{,}5$. Jetzt liegt die Zahl 5 zwischen $3{,}1622\ldots$ und 10, deren Logarithmen bekannt sind. Das geometrische Mittel dieser beiden Zahlen oder $\sqrt{31{,}622}\ldots = 5{,}6234\ldots$, dessen Logarithmen $\frac{1 + 0{,}5}{2} = 0{,}75$. Nunmehr ist 5 schon in die engeren Grenzen $3{,}1628\ldots$ und $5{,}6234\ldots$, deren Logarithmen bekannt sind, eingeschlossen. Auf diese Weise kann man, wenn man von den letzten beiden Zahlen wiederum das geometrische Mittel sucht, die Zahl 5 nach und nach in immer engere Grenzen einschließen, wie dies aus beifolgender Tabelle zu ersehen ist.

Numerus (Potenz).	Logarithmus (Exponent).
A = 10	1
B = 1	0
$\sqrt{AB}$ = C = 3,162277	0,5
$\sqrt{AC}$ = D = 5,623413	0,75
$\sqrt{CD}$ = E = 4,216964	0,625
$\sqrt{DE}$ = F = 4,869674	0,6875
$\sqrt{DF}$ = G = 5,232991	0,71875
$\sqrt{FG}$ = H = 5,048065	0,703125
$\sqrt{FH}$ = J = 4,958069	0,6953125
$\sqrt{HJ}$ = K = 5,002865	0,6992187
$\sqrt{JK}$ = L = 4,980416	0,6972656
$\sqrt{KL}$ = M = 4,991627	0,6982421
⋮	
$\sqrt{XY}$ = Z = 5,000000	0,6989700

Zus. Die Potenzen von 5 kann man leicht berechnen, z. B. $5^2 = 25$, also $\log 25 = 2 \log 5 = 2 \cdot 0{,}6989700 = 1{,}3979400$ [14]).

14) Auf diese ungemein beschwerliche Art hat Heinr. Briggs im Jahre 1615 mit 8 Personen ein ganzes Jahr an der Berechnung der Logarithmen gearbeitet von 1 bis 20000 und von 90000 bis 100000 auf 14 Decimalstellen. Adrian Blacq füllte die große Lücke im Jahre 1628 aus.

Schneller berechnet man die Logarithmen durch die in dem höheren Theil der Mathematik (Analysis) entwickelten Reihen.

Einrichtung und Gebrauch der logarithmischen Tafeln.

§ 45. Erklärung. Die in Schulen gebräuchlichsten logarithmi- Tafeln sind die von Vega. Sie enthalten auf Seite 2 bis 5 die Logarithmen der Zahlen von 1 bis 999 auf 7 Decimalstellen berechnet; auf Seite 6 bis 185 findet man die logarithmische Mantisse aller Zahlen bis 100009 angegeben. Beim Aufschlagen der Logarithmen aller fünfstelligen Zahlen verfährt man folgender Maßen. Die vier ersten Ziffern (Stellen) einer solchen Zahl werden in der ersten Spalte links unter „N" nachgeschlagen; die fünfte Ziffer wird in einem der Felder gesucht, welche in gleicher Horizontallinie mit N, rechts von ihm, die Ziffern 0—9 enthalten. Diejenige Zahl, in welcher die Horizontallinie der 4 ersten Ziffern und die Vertikallinie der fünften Ziffer einander treffen, enthält die vier letzten Ziffern (Stellen) der logarithmischen Mantisse für die fünfstellige Zahl; die drei ersten Stellen dieser Mantisse sind die drei ersten Ziffern der unter 0 (in gleicher Horizontallinie mit den 4 ersten Stellen der gegebenen Zahl) stehenden siebenstelligen Mantisse. Sollte der Platz dieser drei ersten Stellen für die genannte Horizontallinie unbesetzt sein, so nehme man die nächst höher stehenden (ersten drei) Ziffern oder, wenn besondere Zeichen darauf hinweisen, die nächst tiefer stehenden; solche besondere Zeichen sind ein kleiner Strich (oder Sternchen) über den gefundenen vier letzten Stellen der betreffenden Mantisse. Diese 7 Ziffern bilden zusammen die Mantisse des zu suchenden Logarithmen einer fünfstelligen Zahl, und man braucht derselben nur noch die, durch ein Komma getrennte, Charakteristik vorzusetzen, um den gesuchten Logarithmen der betreffenden fünfstelligen Zahl selbst zu haben.

45. Aufg. Es soll der Logarithmus der Zahl 47725 gesucht werden.

Aufl. Die vier ersten Stellen 4772 findet man Seite 80 in der ersten Spalte links unter N, die fünfte in der Horizontallinie des N im sechsten Felde rechts von diesem. Das Feld, in welchem die Horizontallinie der vier ersten Stellen und die Vertikallinie dieser fünften Stelle einander treffen, enthält die Ziffern 7459; die Horizontallinie dieses Feldes weist unter 0 als die zugehörigen drei ersten Stellen die Ziffern 678 auf, es ist also die Mantisse des gesuchten Logarithmus = 6787459 und dieser letztere selbst = 4,6787459, also log 47725 = 4,6787459.

Bei diesem Beispiel nahm ich in der Spalte unter 0, da der Platz der betreffenden drei ersten Stellen unbesetzt war, die nächst höheren drei ersten Ziffern, — anders dagegen, wenn ich den Logarithmus der Zahl 59844 aufschlagen soll. Bei den vier letzten Decimalstellen der Mantisse finde ich einen Strich (oder Sternchen), folglich nehme ich nicht 776 son-

dern 777 als die drei ersten Decimalstellen der gesuchten Mantisse, also
log 59844 = 4,7770206 und nicht = 4,7760206.

(Aufg. Sammlg. § 27. 22—26).

45. Aufg. Man soll zu einem gegebenen Logarithmen die zugehörige Zahl auffinden.

Aufl. Man läßt die Charakteristik unbeachtet, sucht die 3 ersten Decimalstellen in der mit 0 überschriebenen Spalte, und die folgenden 4 Stellen unter den Zahlen auf, die in den Tafeln zu den 3 ersten gehören. In der horizontalen Reihe, in welcher diese 4 Stellen gefunden werden, findet man in der ersten Spalte zur Linken unter N die 4 ersten Stellen der zu suchenden Zahl und in der vertikalen Reihe die 5te Stelle dieser Zahl als Ueberschrift. Sind die Ziffern der gesuchten Zahl also gefunden, so dient nun die Charakteristik dazu, um die Stellen der gefundenen Zahl zu bestimmen (§ 44. Folg. 1). z. B. Welche Zahl hat den Logarithmen 4,6217370? Man findet Seite 69 zwischen den 3 ersten Stellen 621 und 622 die 4 letzten Stellen 7370 in der mit 4 überschriebenen Spalte. In der zu 7370 gehörigen horizontalen Reihe findet man unter N 4185, es ist also die ganze Zahl 41854 und weil die Charakteristik 4, so hat die Zahl 5 Stellen, daher ist 4,6217370 = log 41854. Um zu bezeichnen, daß die gefundene Zahl die natürliche Zahl (der Numerus) für einen gegebenen Logarithmus ist, setzt man auch num. log. (Numerus logarithmi) vor den gegebenen Logarithmen, also num. log. 4,6217370 = 41854.

Findet man die 4 letzten Decimalstellen nicht genau in den Tafeln, so wird die nächst kleinere Zahl genommen. Auf die Differenz dieser von der gegebenen nimmt man nur dann Rücksicht, wenn eine Zahl gesucht werden soll, die mehr als 5 Stellen hat; hiervon später.

(Aufg. Sammlg. § 27. 27—40).

47. Aufg. Man soll den Logarithmen einer ganzen Zahl mit einem Decimalbruche auffinden.

Aufl. Man sucht die Mantisse von der gegebenen Zahl ohne Komma auf, und die Charakteristik richtet sich nach der ganzen Zahl. z. B.

$$\log 34{,}426 = \log \frac{34426}{1000} = \log 34426 - \log 1000 = 4{,}5368866 - 3{,}0000000 = 1{,}5368866.$$

1. Zus. Wenn man den Logarithmen eines Decimalbruches aufsucht, so erhält man negative Logarithmen. z. B. $\log 0{,}4302 = \log \frac{4302}{10000} = \log 4302 - \log 10000 = 3{,}6336704 - 4{,}0000000 = -0{,}3663296.$

Mit negativen Logarithmen zu rechnen hat manches Unbequeme; man bedient sich daher fast durchgehends statt dessen solcher Logarithmen, die eine positive Mantisse und eine negative Charakteristik haben. Es wäre also log 0,4302 = (— 0,3663296 + 1) — 1 = 0,6336704 — 1.

2. Zus. Fehlen nicht nur Ganze, sondern auch Zehntel, Hundertel u. s. w., so erhält die negative Charakteristik so viel Einheiten, als Nullen links vorhanden sind.

z. B. $\log 0{,}000125 = \log \frac{125}{1000000} = \log 125 - \log 10^6 = 2{,}0969100 - 6$, folglich log 0,000125 = 0,0969100 — 4.

48. Aufg. Man soll den Logarithmen einer Zahl, welche mehr als 5 Ziffern enthält, auffinden.

Aufl. 1) Wenn die übrigen Ziffern Nullen enthalten. Man sucht die Mantisse für die 5 ersten Ziffern auf und bestimmt die Charakteristik nach § 44, Folg. 1. Z. B. soll von der Zahl 4673400 der Logarithmus aufgesucht werden, so ist log 46734 . 100 = log 46734 + log 100 = 4,6696330 + 2,0000000, folglich log 4673400 = 6,6696330.

2) Sind nach den 5 ersten Ziffern andere Ziffern als Nullen, so suche man die logarithmische Differenz, welche entsteht, wenn man zwei in der Tafel unmittelbar auf einander folgende Logarithmen von einander abzieht und hieraus durch eine Proportion die logarithmische Differenz für die neue Ziffer sucht. z. B. log 512346.

Man schlägt auf

log 512340 = 5,7095583	Zahlendifferenz = 10
log 512350 = 5,7095667	logarithmische Differenz = 0,0000084.

Aus folgender Proportion findet man für die Zahlendifferenz 6 die logarithmische Differenz: 10 : 6 = 0,0000084 : x, giebt x = 0,0000050, oder 10 : 6 = 84 : x, giebt x = 50,4, so ist log (512340+6) = 5,7095583 + 0,0000050 = 5,7095633.

§ 46. Erklärung. Diese Vielfachen des zehnten Theiles irgend einer logarithmischen Differenz heißen Proportionaltheile (partes proportionales) und befinden sich in den Vegaschen Tafeln rechts unter P. P.

1. Zus. Hat man zu einer siebenziffrigen Zahl den Logarithmen zu suchen, so verfahre man wie oben. z. B. log 6304982.

log 6304900 = 6,7996782	Zahlendifferenz = 100
log 6305000 = 6,7996851	logarithmische Differenz = 69.

100 : 82 = 69 : x, giebt x = 56,58, folglich log 6304982 = 6,7996782 + 0,0000056 = 6,7996838.

Zum Bestimmen der Logarithmen für acht- und mehrziffrige Zahlen reichen die siebenstelligen Logarithmen nicht aus.

2. Zus. Eine und dieselbe Mantisse kann zu den Logarithmen verschiedener Zahlen mit denselben Ziffern (abgesehen von Nullen) gehören, so daß die Logarithmen nur durch die Charakteristik von einander verschieden sind. So ist z. B.

log 1965 = 3,2933626	log 1,965 = 0,2933626
log 1965000 = 6,2933626	log 0,1965 = 0,2933626 — 1
log 19,65 = 1,2933626	log 0,001965 = 0,2933626 — 3.

3. Zus. Soll umgekehrt zu einem Logarithmen die zugehörige Zahl gesucht werden, und man findet den Logarithmen nicht genau in den Tafeln, so nimmt man den nächst kleinern und erhält dadurch die 5 ersten Stellen der Zahl; den Rest sucht man unter der logarithmischen Differenz und findet so die 6te Stelle. Bleibt nun noch etwas übrig, so sucht man das 10fache des 2ten Restes ebendaselbst und findet so die 7te Stelle der Zahl. z. B. log x = 6,7945412.

Gegeben 6,7945412
in der Tafel findet man 6,7945368 = log 6230700
Rest 0,0000044.

Nun ist zwischen log 6230700 und log 6230800 die logarithmische Differenz 70 und die Zahlendifferenz 100; durch die Proportion 70 : 44 = 100 : x erhält man x = 62,8, folglich 6,7945412 = log 6230762,8 = log 6230763.

In der Rubrik P. P. erhält man unter der logarithmischen Differenz 70 für 42 die Zahl 6, zieht man 42 von 44 ab, und nimmt man den Rest 2 zehnfach, so erhält man 20 und die Zahl 2 oder beinahe 21 und die Zahl 3.

(Aufg. Sammlg. § 27. 41—94.)

49. Aufg. Man soll von einer negativen Zahl den Logarithmen auffinden.

Aufl. Dieses kann nur in dem Falle geschehen, wenn die Basis selbst negativ und der Exponent ungerade ist. Mithin kann man mit unsern Logarithmentafeln, welche die Basis 10 voraussetzen, von keiner negativen Zahl einen Logarithmen finden. Da aber in der praktischen Anwendung oft von negativen Zahlen der Logarithmus genommen werden soll, so nimmt man von der positiven Zahl den Logarithmen und hängt der letzten Ziffer der Mantisse ein n an, um dadurch eben anzudeuten, daß der zugehörige Numerus nicht positiv sondern negativ ist. z. B.

log — 34,569 = 1,5386868 n oder num. log 2,9430244 n = — 877,05.

§ 47. Erklärung. In der praktischen Anwendung ist es oft zweckmäßiger das Subtrahiren der Logarithmen in ein Addiren zu verwandeln. Hat man den Logarithmen eines Quotienten aufzuschlagen, also den Logarithmen des Divisors von dem des Dividenden zu subtrahiren, so kann man, statt die eben genannte Subtraktion der beiden Logarithmen auszuführen, die sogenannte decadische Ergänzung (d. E) des ersteren (log des Divisors) zu letzterem (log des Dividenden) addiren. Die dekadische Ergänzung eines Logarithmen erhalte ich aber, wenn ich den gegebenen Logarithmen von 10^n subtrahire und von dieser Differenz wieder 10^n subtrahire; die letzte Differenz ist die dekadische Ergänzung des gegebenen Logarithmen. So ist z. B. die dekadische Ergänzung zu $\log c = 10^n - \log c - 10^n$, also $- \log c = + (10^n - \log c - 10^n)$.

50. Aufg. Bestimme x, wenn 1) $\log x = \log - 458$, 2) $\log x = - \log 458$, 3) $\log x = - \log - 458$, 4) $\log x = 6{,}1963604\,n$, 5) $\log x = - 7{,}5880307$.

Aufl. 1) $x = - 458$,

2) $- \log 458 = - 2{,}6608655 = 0{,}3391345 - 3$,

folglich $x = \frac{1}{458} = 0{,}002183406$,

3) $x = - \frac{1}{458} = - 0{,}002183406$,

4) $x = - 1571666$ und

5) $x = \frac{1}{38728500}$.

(Aufg. Sammlg. § 27. 95—106.)

51. Aufg. 1) $x = \frac{0{,}047316 \,.\, 5{,}092843}{72{,}154 \,.\, 0{,}0030709}$ mit Hilfe der Logarithmen zu berechnen.

Aufl. $\log x = \log 0{,}047316 + \log 5{,}092843 - (\log 72{,}154 + \log 0{,}0030709)$

$$\begin{array}{rl} \log 0{,}047316 & = 0{,}6750080 - 2 \\ \log 5{,}092843 & = 0{,}7069603 \\ \text{d. E. } \log 72{,}154 & = 8{,}1417396 - 10 \\ \text{d. E. } \log 0{,}0030709 & = 9{,}5127343 + 3 - 10 \\ \hline \log x & = 0{,}0364422, \end{array}$$

und daher $x = 1{,}087532$.

Ebenso 2) $x = (317^3/_4)^{0,6}$

Aufl. $\log x = 0{,}6\ (\log 1271 - \log 4)$

$$\begin{array}{lrl} \log 1271 & = & 3{,}1041456 \\ \log\ \ 4 & = & 0{,}6020600 \\ \hline & & 2{,}5020856 \\ & & 0{,}6 \\ \hline \log x & = & 1{,}50125136 \\ & = & 1{,}5012514 \end{array}$$

also $x = 31{,}71402$.

3) $x = \sqrt[10]{34{,}567}$.

Aufl. $\log x = \dfrac{\log 34{,}567}{10} = \dfrac{1{,}5386617}{10} = 0{,}1538662$

folglich $x = 1{,}425168$.

Hat man aus einem ächten Bruche eine Wurzel zu ziehen, also den negativen Logarithmen des Nenners durch eine Zahl d. i. den Wurzelexponenten zu dividiren, so muß man vorher zur positiven und negativen Charakteristik so viele Einheiten addiren, daß sich die negative Charakteristik durch den Wurzelexponenten ohne Rest theilen läßt.

4) $x = (0{,}08)^{1/9}$

Aufl. $\log x = \dfrac{\log\ 0{,}08}{9} = \dfrac{0{,}9030900 - 2}{9} = \dfrac{7{,}9030900 - 9}{9}$

$= 0{,}8781211 - 1$;

folglich ist $x = 0{,}7553028$.

5) $x = \sqrt[5]{\frac{13}{16}}$

Aufl. $\log x = \dfrac{\log 13 - \log 16}{5} = \dfrac{(2{,}1139434 - 1) - 1{,}2041200}{5}$

$= \dfrac{0{,}9098234 - 1}{5} = \dfrac{4{,}9098234 - 5}{5} = 0{,}9819647 - 1$, mithin

$x = 0{,}9593226$.

6) $x = \dfrac{\sqrt[7]{466871^6} . \sqrt[9]{3576^{16}}}{996003 . \sqrt{0{,}0071}}$.

Aufl. $\log x = \frac{6}{7}\log 466871 + \frac{16}{9}\log 3576 - (\log 996003 + \frac{1}{2}\log 0{,}0071)$,

$\log x = 4{,}8593116 + 6{,}3171511 - (5{,}9982606 + 0{,}9256291 - 2)$

$= 11{,}1764627 - 4{,}9238897 = 6{,}2525730$; folglich $x = 1788846$.

(Aufg. Sammlg. § 28. 1—66.)

Sind in der Aufgabe Polynome, so muß man zuerst die einzelnen Glieder derselben besonders (mittelst Logarithmen) berechnen.

7) $x = \sqrt[8]{21 + \sqrt[6]{19}}$

Aufl. $\log x = \frac{1}{8} \log (21 + \text{num. log } \frac{1}{6} \log 19)$.
Nun ist $\frac{1}{6} \log 19 = 0{,}2131256$ und num. $\log \frac{1}{6} \log 19 = 1{,}633525$;
also $\log x = \frac{1}{8} \log 22{,}633525 = 0{,}1693440$,
folglich $x = 1{,}476876$.

(Aufg. Sammlg. § 28. 67—73.)

B. Algebra [15]).

§ 48. Erklärung. Eine algebraische Gleichung ist der doppelte Ausdruck einer und derselben Zahl, durch das Gleichheitszeichen verbunden, in welchem der Werth gewisser Zahlen von dem Werthe anderer abhängig ist. Jene Zahlen heißen unbekannte, diese bekannte. Gewöhnlich bezeichnet man die Unbekannte durch einen der letzten Bustaben x, y, z, t u. s. w.

§ 49. Eine Gleichung auflösen heißt den Werth der Unbekannten finden.

§ 50. Jeder von den beiden Ausdrücken, welche eine Gleichung bilden, heißt eine Seite der Gleichnng. Jede Seite der Gleichung besteht aus einem Gliede oder mehreren Gliedern, die entweder nur bekannte, oder bekannte und unbekannte Zahlen enthalten, z. B. $ax + b = d$.

§ 51. Gleichungen, in welchen außer den Unbekannten bloß bestimmte Zahlen vorkommen, heißen numerische Gleichungen, dagegen Literalgleichungen diejenigen, welche bloß Buchstaben enthalten;

z. B. 1) $\frac{3}{11-x} = \frac{4}{x+3}$ und 2) $(a + x)\,b = cx$.

---

[15]) Der Name Algebra (Herstellung) ist arabischen Ursprungs. — Es ist wohl gewiß, daß die Gelehrten vor Chr. G. die Algebra nicht kannten. Das erste uns bekannte Werk, das die Algebra zum Gegenstande hat, ist von Diophantus von Alexandrien, dessen Zeitalter sehr ungewiß ist; wahrscheinlich lebte er gegen das Jahr 360 nach Chr. G. — Man nennt Leonardo von Pisa, einen Kaufmann, der um das Jahr 1200 große Reisen nach dem Orient unternahm, als denjenigen, der die Algebra aus dem Morgenlande nach Italien verpflanzt habe. Leonardo nennt den Araber Mahomet Ben Musa, der im 9. Jahrhundert lebte, als den ersten Schriftsteller über die Algebra.

§ 52. Eine Gleichung, in der nur eine unbekannte Zahl ein oder mehrere mal vorkommt, heißt eine bestimmte, z. B. $9x - 5x = 16$. Wenn aber in einer Gleichung mehrere unbekannte Zahlen vorkommen, so heißt sie eine unbestimmte oder diophantische [16]), z. B. $x + 2y = 20$. Sind aber so viel Gleichungen als unbekannte Zahlen, so nennt man sie Gleichungen mit mehreren unbekannten Zahlen.

§ 53. Kommt in einer Gleichung die unbekannte Zahl bloß in der ersten und nullten Potenz vor, so heißt die Gleichung eine Gleichung des ersten Grades oder eine einfache Gleichung, z. B. $2x = 64 + {}^3/_8\, x$. Kommt die Unbekannte auch in der zweiten Potenz vor, so heißt die Gleichung eine Gleichung des zweiten Grades oder eine quadratische Gleichung, z. B. $ax^2 + bx = c$; so giebt es Gleichungen des dritten, vierten u. s. w. Grades. Die Gleichungen des zweiten, dritten u. s. w. Grades heißen auch höhere Gleichungen. Eine höhere Gleichung heißt eine reine, wenn die unbekannte Zahl nur in der höchsten und nullten Potenz vorkommt, z. B. $6x^2 = a$ oder $3x^4 = 32$.

§ 54. Von der Gleichung muß man die algebraische Aufgabe unterscheiden, welche verlangt, daß aus bekannten Zahlen unbekannte, gegebenen Bedingungen gemäß, gefunden werden sollen. Die gewöhnliche Sprache der Aufgaben muß also in die Sprache der Algebra gleichsam übertragen werden.

§ 55. Eine Gleichung ordnen heißt die Glieder mit den unbekannten Zahlen auf die eine Seite und die mit den bekannten Zahlen auf die andere Seite der Gleichung bringen. Eine Zahl transponiren heißt ein Glied von einer Seite der Gleichung auf die andere bringen, ohne die Gleichung zu stören.

---

[16]) Für den Erfinder dieser Gleichungen hält man gewöhnlich den Alexandriner Diophantus.

Erster Abschnitt.

Gleichungen des ersten Grades.

1 Gleichungen mit einer unbekannten Zahl.

82. Lehrs. Wenn Zahlen von der einen Seite der Gleichung auf die andere gebracht werden, so geschieht das immer vermittelst der entgegengesetzten Rechnungsart; dem Addiren, Multipliciren und Potenziren ist entgegengesetzt das Subtrahiren, Dividiren und Extrahiren, und umgekehrt.

Bew. 1) $x+a=b$ (Summengleichung). $x+a$ ist um a größer als x, folglich muß $x+a$ um a kleiner gemacht, d. h. a muß von $x+a$ subtrahirt werden, um x zu erhalten. Damit aber die gegebene Gleichung eine Gleichung bleibt, muß a auch von b subtrahirt werden, also $x+a-a=b-a$ oder $x=b-a$.

2) $x-a=b$ (Differenzgleichung). $x-a$ ist um a kleiner als x, also muß $x-a$ um a größer gemacht, d. h. a muß zu $x-a$ addirt werden, um x zu erhalten, folglich $x-a+a=b+a$, oder $x=b+a$.

3) $ax=b$ (Produktgleichung). ax ist $a$mal so groß als x, also muß ax $a$mal kleiner gemacht, d. h. durch a dividirt werden, um x zu erhalten, folglich $\frac{ax}{a}=\frac{b}{a}$ oder $x=\frac{b}{a}$.

4) $\frac{x}{a}=b$ (Quotientengleichung). $\frac{x}{a}$ ist $a$mal kleiner als x, folglich muß $\frac{x}{a}$ $a$mal größer gemacht, d. h. mit a multiplicirt werden, um x zu erhalten, also $\frac{ax}{a}=ab$ oder $x=ab$.

5) $\frac{a}{x}=b$, so ist $a=bx$ und $x=\frac{a}{b}$.

6) $x^2=a$ gehört zu den Gleichungen des zweiten Grades, davon später.

7) $\sqrt{x}=b$ (Wurzelgleichung). Um x aus $\sqrt{x}$ zu erhalten, muß man $\sqrt{x}$ zur zweiten Potenz erheben, also auch b zur zweiten Potenz, folglich $(\sqrt{x})^2=b^2$ oder $x=b^2$.

8) $a^x = b$ (Exponentialgleichung). Sind die Exponenten unbekannt, so kann die Gleichung nur mit Hilfe der Logarithmen gelöst werden, also $\log a^x = \log b$; $\log a^x$ ist aber $= x \log a$, folglich $x = \frac{\log b}{\log a}$.

Beispiele. 1) $12x-9=7x+6$. Wenn wir die Glieder mit x auf die linke, die Glieder ohne x auf die rechte Seite (oder umgekehrt) transponiren, so erhalten wir $12x - 7x = 6 + 9$ oder $5x = 15$, folglich $x = \frac{15}{5} = 3$. Wollen wir uns von der Richtigkeit des Werthes für $x = 3$ überzeugen, so setzen wir in die gegebene Gleichung für $x=3$ ein, und erhalten dann $12.3-9=7.3+6$ oder $36-9=21+6$, giebt $27=27$, folglich ist x gleich 3.

2) $6x+5=2x-12+8x$
$6x-2x-8x=-12-5$
$-4x=-17$
mit -1 beide Seiten multiplicirt, giebt $4x=17$ (oder durch -4 dividirt), $x = \frac{17}{4} = 4\,^1/_4$.

3) $4x+15-3x=6x-3-8x$
$4x-3x-6x+8x=-3-15$
$3x=-18$
$x=-6$.

4) $13x-7x-12-x-8x-9-5x=0$
$-8x=21$
$x=-\,^{21}/_8=-2\,^5/_8$.

5) $^2/_3x-5\,^1/_2-x=6\,^1/_3-\,^3/_4x$.
Wir schaffen zunächst die Brüche weg, indem wir die ganze Gleichung (jedes Glied der Gleichung) mit dem gemeinschaftlichen Nenner multipliciren. Wir erhalten dann
$8x-66-12x=76-9x$
$5x=142$
$x=\,^{142}/_5=28\,^2/_5$.

6) $9\,^3/_4-\frac{5x}{4}=\frac{3x}{8}+3\,^3/_4x-\frac{x}{2}$
$-39x=-78$
$x=\frac{-78}{-39}=2$.

7) $\frac{2x+5}{2}-\frac{9x-3}{6}=\frac{4-7x}{5}+x$

$30x+75-45x+15=24-42x+30x$

$-3x=-66$

$x=\frac{-66}{-3}=22.$

8) $5\frac{1}{2}-3(8+2x)+4(5x-\frac{2}{3})=6x$

$\frac{11}{2}-24-6x+20x-\frac{8}{3}=6x$

$33-144-36x+120x-16=36x$

$48x=127$

$x=2\frac{31}{48}.$

9) $2x-3(5+\frac{3}{4}x)+(4-x)\frac{2}{3}-\frac{1}{4}(3x-16)=0$

$2x-15-\frac{9x}{4}+\frac{8}{3}-\frac{2x}{3}-\frac{3x}{4}+4=0$

$24x-180-27x+32-8x-9x+48=0$

$24x-27x-8x-9x=180-32-48$

$-20x=100$

$x=-5.$

10) $\frac{5x-2}{4}+\frac{6x-3}{4x+1}=\frac{10x+4}{8}.$

Man bringe $\frac{5x-2}{4}$ und $\frac{10x+4}{8}$ auf gleichen Nenner und addire, so erhält man: $\frac{10x-4-10x-4}{8}+\frac{6x-3}{4x+1}=0$

$-1+\frac{6x-3}{4x+1}=0$

$\frac{6x-3}{4x+1}=1$

$6x-3=4x+1$

$x=2.$

11) $\frac{3x+4}{7}-\frac{8x-6}{5x+3}=\frac{6x+3}{14}$

$\frac{6x+8-6x-3}{14}=\frac{8x-6}{5x+3}$

$\frac{5}{14}=\frac{8x-6}{5x+3}$

$25x+15=112x-84$

$x=1\frac{4}{29}.$

12) $\frac{3x-4}{5}:\frac{8x+1}{6}=8:15.$

Man multiplicire die äußern und inneren Glieder je mit einander, so ist

$$9x - 12 = \frac{32x+4}{3}$$
$$27x - 36 = 32x + 4$$
$$x = -8.$$

13) $\frac{2x}{3a} - 5 + \frac{3x}{4b} = \frac{a}{6b}.$

Der gemeinschaftliche Nenner ist 12ab, also

$$8bx - 60ab + 9ax = 2a^2$$
$$8bx + 9ax = 2a^2 + 60ab$$
$$x(8b + 9a) = 2a(a+30b)$$
$$x = \frac{2a(a+30b)}{8b+9a}.$$

14) $\frac{x}{a} - b + \frac{cx}{ad} = g.$ Der gemeinschaftliche Nenner ist ad:

$$xd - abd + cx = adg$$
$$x(d + c) = ad(g + b)$$
$$x = \frac{ad(g+b)}{d+c}.$$

15) $\frac{a}{x} + b = \frac{c}{x} - d$

$$a + bx = c - dx$$
$$x(b+d) = c - a$$
$$x = \frac{c-a}{b+d}.$$

16) $\frac{3a}{x} - 6 = \frac{2a - x}{x}$

$$3a - 6x = 2a - x$$
$$-5x = -a$$
$$x = \frac{-a}{-5} = \frac{a}{5}.$$

17) $a - \frac{b}{cx} - \frac{d}{ex} - \frac{f}{gx} = 0.$

Der gemeinschaftliche Nenner ist $cegx$:

$$acegx - egb - cgd - cef = 0$$
$$x = \frac{beg + cdg + cef}{aceg}.$$

18) $ax - b(c + x) = ad$

$$ax - bc - bx = ad$$
$$x(a - b) = ad + bc$$
$$x = \frac{ad + bc}{a-b}.$$

19) $2bx - 5b(x - 3c) + 3b(4c - 5x) = 9cx;$ $2bx - 5bx + 15bc + 12bc - 15bx = 9cx;$ $-18bx - 9cx = -27bc.$

Die ganze Gleichung durch -9 dividirt, giebt $x(2b+c) = 3bc;$ $x = \frac{3bc}{2b+c}$

20) $3a^2x - 5a(2ax - b^2) = 3x(b-a)(b+a) - 4a^2x$

$3a^2x - 10a^2x + 5ab^2 = 3b^2x - 3a^2x - 4a^2x$

$3a^2x - 10a^2x + 3a^2x + 4a^2x - 3b^2x = -5ab^2$

$3b^2x = 5ab^2$

$$x = \frac{5a\,b^2}{3\,b^2} = \frac{5a}{3}.$$

21) $\frac{3x}{a} - \frac{2a-5x}{3b} = \frac{4x+b}{2a} + 1.$

Der gemeinschaftliche Nenner ist $6ab$:

$18bx - 2a(2a - 5x) = 3b(4x+b) + 6ab$

$x(6b + 10a) = 4a^2 + 3b^2 + 6ab$

$$x = \frac{4a^2+3b^2+6ab}{6b+10a}.$$

22) $\frac{5x}{3a+b} - 2 = \frac{8b}{5a}.$

Der gemeinschaftliche Nenner ist $5a(3a+b)$, also

$25ax - 30a^2 - 10ab = 24ab + 8b^2$

$$x = \frac{30a^2+34ab+8b^2}{25a}.$$

23) $\frac{a}{b+x} = \frac{c}{d-x}.$

Der gemeinschaftliche Nenner ist $(b+x)(d-x)$:

$ad - ax = bc + cx$

$$x = \frac{bc - ad}{-a - c} = \frac{ad - bc}{a + c}.$$

24) $ax^2 + bx = cx$ scheint eine quadratische Gleichung zu sein, ist aber eine Gleichung des ersten Grades; man dividire sie nur durch x, so erhält man $ax + b = c$

$$x = \frac{c-b}{a}.$$

25) $\sqrt{3x + 19} = 5.$ Erhebt man beide Seiten zur 2ten Potenz, so erhält man: $3x + 19 = 25$

$x = 2.$

26) $\sqrt{{}^2/_3x - 6} = 6$

${}^2/_3x - 6 = 36$

$$x = \frac{42 . 3}{2} = 63.$$

27) $\sqrt{{}^5/_8x + 90} - 9 = 1$

${}^5/_8x + 90 = 100$

$$x = \frac{10 . 8}{5} = 16.$$

28) $\sqrt{x+9} = 1 + \sqrt{x}$

$$x + 9 = 1 + 2\sqrt{x} + x$$
$$\sqrt{x} = 4$$
$$x = 16.$$

29) $\sqrt{4x+8} + 5 = 2\sqrt{x} + 7$

$$\sqrt{4x+8} = 2\sqrt{x} + 2$$
$$4x + 8 = 4x + 8\sqrt{x} + 4$$
$$8\sqrt{x} = 4$$
$$\sqrt{x} = \tfrac{1}{2}$$
$$x = \tfrac{1}{4}.$$

30) $\sqrt[3]{7x+8} = 4$

$$7x+8 = 64$$
$$7x = 56$$
$$x = 8.$$

31) $\sqrt[3]{6x^2+12x} = 2+x$

$$6x^2+12x = 8+12x+6x^2+x^3$$
$$x^3 = -8$$
$$x = -2.$$

(Aufg. Smlg. § 31. 1—143 und § 37).

32) $\sqrt[x]{a^{3x-2}} \cdot \sqrt[x-1]{a^{2x+5}} = \sqrt[x-1]{a^{5x+1}}$

$\frac{3x-2}{x} \log a + \frac{2x+5}{x-1} \log a = \frac{5x+1}{x-1} \log a.$ Man dividire die ganze Gleichung durch log a, so ist

$$\frac{3x-2}{x} + \frac{2x+5}{x-1} = \frac{5x+1}{x-1}$$
$$3x^2-5x+2+2x^2+5x = 5x^2+x$$
$$x = 2.$$

33) $0{,}1289701^x = \frac{3873{,}95}{7161{,}554}$

$$x = \frac{\log 3873{,}95 - \log 7161{,}554}{\log 0{,}1289701}$$

$$x = \frac{3{,}588154 - 3{,}8550073}{0{,}1104890-1} = \frac{-0{,}2668533}{-0{,}8895110} = 0{,}3.$$

34) $343^x = \frac{117649 \cdot 1024}{32^x}$. Diese Gleichung läßt sich sehr bequem lösen, wenn man die Zahlen in ihre Primfaktoren zerlegt und in Potenzform schreibt, als:

$$7^{3x} = \frac{7^6 \cdot 2^{10}}{2^{5x}}$$
$$x(3\log 7 + 5\log 2) = 6\log 7 + 10\log 2$$
$$x = \frac{2(3\log 7 + 5\log 2)}{3\log 7 + 5\log 2} = 2.$$

(Aufg. Smlg. § 35. 1—17.)

2. Gleichungen mit mehreren unbekannten Zahlen.

52. Aufg. Gleichungen mit mehreren unbekannten Zahlen aufzulösen.

Aufl. Wenn eine Gleichung mehrere unbekannte Zahlen enthält, und es sollen für dieselben vollständig bekannte Werthe gefunden werden, so reicht eine einzige Gleichung dazu nicht hin, indem vermittelst derselben nur der Werth jeder unbekannten Zahl durch die übrigen in der Gleichung vorkommenden bekannten und unbekannten Zahlen ausgedrückt werden kann, z. B. $ax + by = d$, so ist $x = \frac{d - by}{a}$; es bedarf vielmehr dazu so vieler von einander unabhängiger Gleichungen, als unbekannte Zahlen vorhanden sind. In diesem Falle findet man jede unbekannte Zahl dadurch, daß man aus den Gleichungen alle übrigen wegschafft mit Ausnahme dieser Einen, und zwar geschieht dies durch eine der vier Auflösungs- oder Eliminationsmethoden.

I. Durch die Methode der Addition oder Subtraktion (Multiplication mit einem entsprechenden Faktor, — vorzugsweise auch die Eliminations-Methode genannt);

II. durch die Methode der Substitution;

III. durch die Methode der Comparation (Gleichsetzung);

IV. durch die Bézout'sche Methode.

I. Die Additions- und Subtractionsmethode.

Man ordne die Gleichung, verbinde dann je zwei Gleichungen, in denen sich die hinauszuschaffende Zahl befindet, durch Addition, wenn die Zahl, welche man hinwegschaffen will, gleiche Coefficienten und entgegengesetzte Vorzeichen hat, und durch Subtraktion bei gleichen Coefficienten und Vorzeichen. Dadurch erhält man eine unbekannte Zahl und auch eine Gleichung weniger. Sollte die hinauszuschaffende Zahl in beiden Gleichungen verschiedene Coefficienten haben, so suche man dieselben durch Multiplication mit entsprechenden Faktoren gleich zu machen. Fährt man auf diese Weise fort, so erhält man zuletzt nur eine Gleichung mit einer unbekannten Zahl, z. B.

$$1)\quad ax + by = d$$
$$a_1x + b_1y = d_1.$$

Um x zu eliminiren, multiplicire man die erste Gleichung mit a_1, die zweite mit a, so erhält man

$$aa_1x + ba_1y = da_1$$
$$aa_1x + ab_1y = ad_1$$
$$\overline{ba_1y - ab_1y = da_1 - ad_1,}$$

also $y = \frac{da_1 - ad_1}{ba_1 - ab_1} = \frac{ad_1 - da_1}{ab_1 - ba_1}$.

Diese Auflösung ist nicht möglich, wenn $ba_1 - ab_1 = 0$, d. h. $ba_1 = ab_1$ ist.

Um x zu finden, verfahre man ebenso oder man setze den gefundenen Werth für y in die gegebene Gleichung ein, also

$$ax + b\left(\frac{da_1 - ad_1}{ba_1 - ab_1}\right) = d$$

$$ax = \frac{d(ba_1 - ab_1) - b(da_1 - ad_1)}{ba_1 - ab_1} = \frac{dba_1 - dab_1 - bda_1 + abd_1}{ba_1 - ab_1}$$

$$= \frac{abd_1 - dab_1}{ba_1 - ab_1}.$$

$$x = \frac{bd_1 - db_1}{ba_1 - ab_1}.$$

$$2)\quad \begin{aligned} ax + by + cz &= d \\ a_1x + b_1y + c_1z &= d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z &= d_2. \end{aligned}$$

Aus diesen 3 Gleichungen suche man 2 Gleichungen mit 2 unbekannten Zahlen und dann eine Gleichung mit einer Unbekannten zu erhalten.

Man multiplicire die erste Gleichung mit a_1, die zweite mit a und subtrahire, so erhält man $y(ba_1 - ab_1) + z(ca_1 - ac_1) = da_1 - ad_1$, oder setzt man für die Differenzen $ba_1 - ab_1$ u. s. w. $= \beta, \gamma, \delta$, so entsteht die Gleichung $\beta y + \gamma z = \delta$. Ebenso verfährt man mit der ersten und dritten oder mit der zweiten und dritten Gleichung, und man erhält $\beta_1 y + \gamma_1 z = \delta_1$. Hierauf verfährt man wie in 1) und erhält $z = \frac{\beta_1\delta - \beta\delta_1}{\beta_1\gamma - \beta\gamma_1}$. Wenn $cb_1 - c_1b$, $c_1b_2 - c_2b_1$ und $c_2b - cb_2$ gleich Null sind, so ist die Lösung der Gleichung nicht möglich.

$$3)\quad \begin{aligned} 2x + 3y &= 23 \\ 5x - 2y &= 10. \end{aligned}$$

Multiplicirt man die erste Gleichung mit 5, die zweite mit 2 und subtrahirt, so erhält man

$$\begin{aligned} 10x + 15y &= 115 \\ 10x - 4y &= 20 \\ \hline 19y &= 95 \\ y &= 5. \end{aligned}$$

Oder multiplicirt man die erste Gleichung mit 2 und die zweite mit 3 und addirt, so ist

$$4x + 6y = 46$$
$$15x - 6y = 30$$
$$19x = 76 \text{ und } x = 4.$$

4) a) $30x + 8y + 5z = 150$
b) $24x + 2y + 3z = 94$
c) $15x + 12y + 6z = 129$

$$30x + 8y + 5z = 150$$
$$4.24x + 4.2y + 4.3z = 4.94$$

d) $66x + 7z = 226$

$$6.24x + 6.2y + 6.3z = 6.94$$
$$15x + 12y + 6z = 129$$

e) $129x + 12z = 435.$

Multiplicirt man die Gleichung d) mit 12 und e) mit 7, so erhält man

$$12.\ 66x + 12.\ 7z = 12.226$$
$$7.129x + 7.12z = 7.435$$
$$111x = 333 \text{ und } x = 3.$$

Setzt man $x = 3$ in die Gleichung d) hinein, so erhält man $7z = 28$ und $z = 4$. Setzt man wieder $x = 3$ und $z = 4$ in die Gleichung b) hinein, so erhält man y; also $24.3+2y+3.4 = 94$ und $y = 5$.

II. Die Substitutionsmethode.

Man sucht den Ausdruck irgend einer Unbekannten aus einer Gleichung, und trägt diesen Ausdruck in die übrigen Gleichungen ein. Mithin kann diese unbekannte Zahl in den übrigen Gleichungen nicht mehr vorkommen. So fährt man fort, bis man nur eine Gleichung mit einer Unbekannten erhält.

1) $ax + by = d$
$a_1x + b_1y = d_1.$

Aus der ersten Gleichung findet man $x = \frac{d - by}{a}$; diesen Ausdruck für x in die 2. Gleichung gesetzt, giebt $\frac{a_1(d-by)}{a} + b_1y = d$, und

$da_1 - ba_1y + ab_1y = ad_1$, folglich $y = \frac{ad_1 - a_1d}{ab_1 - ba_1}$. Wie man x findet, ist bereits oben gezeigt.

2) $ax + by + cz = d$
$a_1x + b_1y + c_1z = d_1$
$a_2x + b_2y + c_2z = d_2.$

Aus der ersten Gleichung findet man $x = \frac{d - by - cz}{a}$; diesen Ausdruck für x in die 2. und 3. Gleichung gesetzt, giebt:

$$y(ab_1 - ba_1) + z(ac_1 - ca_1) = ad_1 - da_1 \text{ oder } \beta y + \gamma z = \delta$$
$$y(ab_2 - ba_2) + z(ac_2 - a_2c) = ad_2 - a_2d \text{ oder } \beta_1 y + \gamma_1 z = \delta_1;$$

hieraus findet man x oder z, wie oben gezeigt.

3) a) $7x + 12y = 50$
b) $5x + 9y = 37$

c) $x = \frac{50 - 12y}{7}$;

diesen Ausdruck für x in die Gleichung b) gesetzt, giebt $250 - 60y + 63y = 259$, also $3y = 9$ und $y = 3$. Für $y = 3$ in die Gleichung c) gesetzt, giebt $x = \frac{50 - 36}{7} = 2$.

4) a) $3x + 5y + z = 10$
b) $5x - 3y + 2z = 20$
c) $6x - 3z = 30$.

Aus der Gleichung c) ist $x = \frac{30 + 3z}{6}$ oder $\frac{10 + z}{2}$; diesen Ausdruck für x in die Gleichung a) und b) gesetzt, giebt:

$$\frac{30 + 3z}{2} + 5y + z = 10 \text{ und } \frac{50 + 5z}{2} - 3y + 2z = 20.$$

Hieraus findet man d) $5z + 10y = -10$ oder $z + 2y = -2$ und
e) $9z - 6y = -10$.

Aus der Gleichung d) ist $z = -2 - 2y$; diesen Ausdruck für z in die Gleichung e) gesetzt, giebt $-18 - 18y - 6y = -10$, also $-24y = 8$ und $y = -\frac{1}{3}$. Für $y = -\frac{1}{3}$ in die Gleichung d) gesetzt, giebt $z = -2 + \frac{2}{3} = -1\frac{1}{3}$. Den Werth für $z = -1\frac{1}{3}$ in die Gleichung c) gesetzt, giebt $x = \frac{30 - 4}{6} = 4\frac{1}{3}$.

III. Die Comparationsmethode.

Man suche einen Ausdruck für eine und dieselbe Unbekannte aus allen Gleichungen, in denen sie vorkommt, und verbinde je zwei dieser Ausdrücke zu einer Gleichung. Dadurch erhält man eine unbekannte Zahl aber auch eine Gleichung weniger, und so fahre man fort, bis man nur eine Gleichung mit einer Unbekannten erhält.

1) $ax + by = d$ | $x = \frac{d - by}{a}$ | $\frac{d - by}{a} = \frac{d_1 - b_1 y}{a_1}$

$a_1 x + b_1 y = d_1$ | $x = \frac{d_1 - b_1 y}{a_1}$ | $y = \frac{ad_1 - da_1}{ab_1 - ba_1}$.

Setzt man diesen Werth für y in die gegebene Gleichung hinein, so erhält man

$$x = \frac{d - b\left(\frac{ad_1 - da_1}{ab_1 - ba_1}\right)}{a} = \frac{ab_1 d - bda_1 - abd_1 + bda_1}{a(ab_1 - ba_1)} = \frac{b_1 d - bd_1}{ab_1 - a_1 b}.$$

2) $ax + by + cz = d$ | $x = \frac{d - by - cz}{a}$

$a_1 x + b_1 y + c_1 z = d_1$ | $x = \frac{d_1 - b_1 y - c_1 z}{a_1}$

$a_2 x + b_2 y + c_2 z = d_2$ | $x = \frac{d_2 - b_2 y - c_2 z}{a_2}$

$$da_1 - ba_1 y - ca_1 z = ad_1 - ab_1 y - ac_1 z$$
$$da_2 - ba_2 y - ca_2 z = ad_2 - ab_2 y - ac_2 z.$$

Also $y = \frac{(ad_1 - da_1) + (ca_1 - ac_1)z}{ab_1 - ba_1}$ oder $\frac{\delta + \gamma z}{\beta}$

$y = \frac{(ad_2 - da_2) + (ca_2 - ac_2)z}{ab_2 - ba_2}$ oder $\frac{\delta_1 + \gamma_1 z}{\beta_1}$ u. s. w.

3) $4x + y = 34$ | $x = \frac{34 - y}{4}$ | $34 - y = 64 - 16y$

$4y + x = 16$ | $x = 16 - 4y$ | $15y = 30$

$y = 2$ und $x = 16 - 8 = 8$.

4) $x + y + z = 90$ | $90 - y - z = 75 - 2y - 4z$

$x + 2y + 4z = 75$ | $90 - y - z = 64 - 3y - 9z$

$x + 3y + 9z = 64$

$y + 3z = -15$ | $15 + 3z = \frac{26 + 8z}{2}$

$2y + 8z = -26$

$30 + 6z = 26 + 8z$; also $z = 2$

$y + 6 = -15$ und $y = -21$

$x - 21 + 2 = 90$ und $x = 109$.

IV. Die Bézout'sche Methode.

Sind zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten gegeben, so multiplicire man die eine der gegebenen Gleichungen mit einer beliebigen Zahl (m) und subtrahire sie dann von der anderen unveränderten Gleichung (oder

umgekehrt). Setzt man nun in dieser durch Subtraktion der beiden Gleichungen gewonnenen neuen Gleichung den Coefficienten der einen Unbekannten gleich Null, so erhält man eine Gleichung mit nur einer unbekannten Zahl, deren Lösung dann weiter keine Schwierigkeiten macht; dadurch ist aber auch zugleich die Zahl, mit der die eine Gleichung multiplicirt wurde, bestimmt. Aehnlich verfährt man, wenn drei und mehr Gleichungen gegeben sind. Einige Beispiele mögen das Gesagte erläutern.

$$1)\quad a)\ ax + by = d$$
$$b)\ a_1x + b_1y = d_1$$

Multiplicirt man die erste Gleichung mit m, so erhält man

$$c)\ amx + bmy = dm$$

Subtrahirt man die Gleichung b) von c), so ist

$$d)\ (am - a_1)x + (bm - b_1)y = dm - d_1.$$

Soll x eliminirt werden, so setze man $am - a_1 = 0$, dann wird $m = \frac{a_1}{a}$ und die Gleichung d) lautet: $\left(\frac{ba_1}{a} - b_1\right)y = \frac{da_1}{a} - d_1$, folglich $y = \frac{a_1d - ad_1}{a_1b - ab_1}$.

Soll y eliminirt werden, so muß $bm - b_1 = 0$ gesetzt werden, dann wird $m = \frac{b_1}{b}$ und die Gleichung d) wird heißen:

$$\left(\frac{ab_1}{b} - a_1\right)x = \frac{db_1}{b} - d_1,\ \text{folglich}\ x = \frac{b_1d - bd_1}{ab_1 - a_1b}.$$

$$2)\quad a)\ ax + by + cz = d$$
$$b)\ a_1x + b_1y + c_1z = d_1$$
$$c)\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2.$$

Multiplicirt man die Gleichung a) mit m und die Gleichung b) mit m_1, so ist:

$$d)\ amx + bmy + cmz = md$$
$$e)\ a_1m_1x + b_1m_1y + c_1m_1z = m_1d_1.$$

Subtrahirt man die Summe dieser beiden Gleichungen d) und e) von c), so ist:

$$f)\ x(a_2 - a_1m_1 - am) + y(b_2 - b_1m_1 - bm) + z(c_2 - c_1m_1 - cm) = d_2 - d_1m_1 - dm.$$

Wird x gesucht, so setze man sowohl $b_2 - b_1m_1 - bm$ als auch $c_2 - c_1m_1 - cm = 0$.

Hieraus findet man $m = \frac{b_1c_2 - b_2c_1}{b_1c - bc_1} = \frac{\alpha}{\beta}$ und $m_1 = \frac{bc_2 - b_2c}{bc_1 - b_1c} = \frac{\alpha_1}{\beta_1}$

Setzt man diese Werthe für m und m_1 in die Gleichung f) hinein, so wird

$$x\left(a_2 - \frac{a_1\alpha_1}{\beta_1} - \frac{a\alpha}{\beta}\right) = d_2 - \frac{a_1 d_1}{\beta_1} - \frac{\alpha d}{\beta} \text{ folglich}$$

$$x = \frac{d_2\beta\beta_1 - d_1\alpha_1\beta - d\alpha\beta_1}{a_2\beta\beta_1 - a_1\alpha_1\beta - a\alpha\beta_1} \text{ u. s. w.}$$

$$3) \quad a) \; 3x + 4y = 36$$
$$b) \; 2x - 5y = -22.$$

Die Gleichung a) mit m multiplicirt, giebt:

$$c) \; 3mx + 4my = 36\,m;$$

diese Gleichung von b) subtrahirt, giebt

$$d) \; (2-3m)x - (5+4m)y = -22 - 36.$$

Ist $2-3m = 0$, so ist $m = \frac{2}{3}$ und die Gleichung d) wird nun heißen:

$$-(5 + \tfrac{8}{3})\,y = -22 - 24, \text{ folglich } y = 6.$$

$$4) \quad a) \; 2x - 3y + 4z = 17$$
$$b) \; x - 2y + 3z = 12$$
$$c) \; 3x - y + 2z = 19.$$

Multiplicirt man die Gleichung a) mit m und b) mit m_1, und subtrahirt dann die Summe beider von c), so erhält man:

$$d) \; (3-2m-m_1)x - (1-3m-2m_1)y + (2-4m-3m_1)z = 19 - 17m - 12m_1.$$

Setzt man $3-2m-m_1 = 0$ und $1-3m-2m_1 = 0$ | also $2m + m_1 = 3$ und $3m + 2m_1 = 1$, so ist $m = 5$ und $m_1 = -7$.

Substituirt man diese Werthe für m und m_1 in die Gleichung d), so ist:
$(2 - 20 + 21)z = 19 - 85 + 84$ oder $3z = 18$ und $\mathbf{z = 6}$.

Will man y finden, so setzt man $3 - 2m - m_1 = 0$
und $2 - 4m - 3m_1 = 0$,
dann ist $m = \frac{7}{2}$
und $m_1 = -4$.

Substituirt man diese Werthe für m und m_1 in die Gleichung d), so erhält man:

$\frac{3}{2}y = \frac{15}{2}$, folglich $\mathbf{y = 5}$ und $\mathbf{x = 4}$.

(Aufg. Sammlg. § 32. 5—96; § 35. 18—27 und § 38.)

Zweiter Abschnitt.

Gleichungen des zweiten Grades [17]).

1. Gleichungen mit einer unbekannten Zahl.

§ 56. Erklärung. An einer geordneten quadratischen Gleichung unterscheiden wir drei Glieder; ein Glied mit x^2, ein Glied mit x und ein Glied mit x^0, als $ax^2 + bx + c = 0$. Bringen wir c auf die andere Seite und dividiren die ganze Gleichung durch a, so ist $x^2 + \frac{bx}{a} = -\frac{c}{a}$. Setzen wir, um abzukürzen, $\frac{b}{a} = p$ und $\frac{-c}{a} = q$, so erhalten wir $x^2 + px = q$, wo p und q sowohl positiv als auch negativ oder gleich Null sein können. Ist p und q nicht gleich Null, so wird die Gleichung eine gemischt oder unrein quadratische Gleichung genannt; ist $q=0$, so ist die Gleichung eine einfache; ist $p = 0$, also $x^2 = q$, so heißt sie eine rein quadratische.

a) Rein quadratische Gleichungen.

53. Aufg. Eine rein quadratische Gleichung aufzulösen.

Aufl. Eine solche rein quadratische Gleichung, $x^2 = q$, wird aufgelöst, indem man aus beiden Seiten der Gleichung die Quadratwurzel zieht. Da jede Quadratwurzel aus einer positiven Zahl sowohl eine positive als auch eine negative Zahl sein kann, so erhält man immer für x zwei Werthe, als $x = +\sqrt{q}$ oder $x = -\sqrt{q}$, und zwar sind sie reell, wenn q positiv, hingegen imaginär, wenn q negativ ist, als $x^2 = -q$, giebt $x = \pm\sqrt{-q}$.

---

[17]) Man nimmt den Araber Mahomet Ben Musa als den Erfinder der Auflösung quadratischer Gleichungen an.

Beispiele. 1) $x^2 - 14 = 242 - 3x^2$

$$4x^2 = 256$$
$$x^2 = 64$$
$$x = \pm 8.$$

2) $12\frac{2}{3} - 4\frac{1}{2}x^2 = 7\frac{1}{5} + \frac{3}{4}x^2$

$$5\frac{7}{15} = 5\frac{1}{4}x^2$$
$$x^2 = \frac{328}{315} = 1{,}0412\ldots\ldots.$$
$$x = \pm\sqrt{1{,}0412\ldots.} = \pm 1{,}02\ldots.$$

(Aufg. Sammlg. § 33. 3—32 und § 39.)

b) Gemischt quadratische Gleichungen.

§ 57. Erklärung. Eine gemischt quadratische Gleichung heißt geordnet, wenn auf der einen Seite 1) die unbekannte Zahl in der zweiten Potenz mit dem Coefficienten eins und positiv und 2) die unbekannte Zahl in der ersten Potenz mit beliebigen Coefficienten und Vorzeichen steht, auf der andern Seite aber die bekannte Zahl, z. B. $x^2 \pm bx = \pm c$.

54. Aufg. Eine gemischt quadratische Gleichung aufzulösen.

Aufl. Vergleicht man die Gleichung $x^2 \pm bx = \pm c$ mit $(\alpha \pm \beta)^2 = \alpha^2 \pm 2\alpha\beta + \beta^2$, so findet man, daß die erste Seite einer geordneten gemischt quadratischen Gleichung das unvollständige Quadrat eines Binoms ist, in welchem das Quadrat des zweiten Gliedes fehlt; dieses zweite Glied ist der halbe Coefficient der unbekannten Zahl in der ersten Potenz. Will man also aus der ersten Seite dieser Gleichung vollständig die Quadratwurzel ziehen, so addire man vorher $\left(\frac{b}{2}\right)^2$ (quadratische Ergänzung) hinzu und zwar zu beiden Seiten, damit die Gleichung nicht gestört wird; also $x^2 \pm bx + \frac{b^2}{4} = \pm c + \frac{b^2}{4}$ oder $= \frac{b^2 \pm 4c}{4}$. Aus der linken Seite kann man jetzt vollständig die Quadratwurzel ziehen, und man erhält eine Gleichung des ersten Grades, die nach den bekannten Regeln gelöst wird; also $\sqrt{x^2 \pm bx + \frac{b^2}{4}} = \sqrt{\frac{b^2 \pm 4c}{4}}$ giebt $x \pm \frac{b}{2} = \pm\frac{\sqrt{b^2 \pm 4c}}{2}$ und $x = \frac{\pm b \pm \sqrt{b^2 \pm 4c}}{2}$. Man sieht hieraus, daß auch jede gemischt quadratische Gleichung zwei Wurzeln hat, die reell sind, wenn c mit dem positiven Zeichen versehen ist. Ist c negativ und kleiner als $\frac{1}{4}b^2$, so sind beide Werthe ebenfalls reel, ist $c = \frac{1}{4}b^2$ (und

negativ), so hat die Gleichung zwei gleiche reelle Wurzeln. und ist endlich $c > \frac{1}{4} b^2$ (und negativ), so sind beide Wurzeln imaginär. Die gleichen Wurzeln bilden daher den Uebergang von den reellen Wurzeln zu den imaginären.

Beispiele:

1) $x^2 - 12x = -20$

$x^2 - 12x + 6^2 = -20 + 36$

$\sqrt{x^2 - 12x + 6^2} = \sqrt{16}$

$x - 6 = \pm 4$

$x = 6 \pm 4,$

d. h. entweder ist $x = 10$ oder $x = 2$;

2) $x^2 + 4\frac{1}{8} = 4\frac{3}{8}\, x$

$x^2 - \frac{35}{8} x + \left(\frac{35}{16}\right)^2 = -\frac{33}{8} + \left(\frac{35}{16}\right)^2$

$\sqrt{x^2 - \frac{35}{8} x + \left(\frac{35}{16}\right)^2} = \sqrt{\frac{1225 - 1056}{16^2}}$

$x - \frac{35}{16} = \pm \frac{13}{16}$

$x = 3$ oder $1\frac{3}{8}$;

3) $12x^2 + x = 35$. Man muß die Gleichung durch 12 dividiren.

$x^2 + \frac{1}{12} x + \left(\frac{1}{24}\right)^2 = \frac{35}{12} = \frac{1}{576}$

$\sqrt{x^2 + \frac{x}{12} + \left(\frac{1}{24}\right)^2} = \sqrt{\frac{1681}{576}}$

$x + \frac{1}{24} = \pm \frac{41}{24}$

$x = \frac{5}{3}$ oder $-\frac{7}{4}$;

4) $14x - x^2 = 48$

$x^2 - 14x = -48$

$x^2 - 14x + 49 = 1$

$x - 7 = \pm 1$

$x = 7 \pm 1$

$x = 8$ oder 6.

1. Zus. Haben zwei auf einander folgende Glieder einer Gleichung dasselbe Vorzeichen, so nennt man dies eine Folge (+ + oder — —), haben sie verschiedene Vorzeichen, so wird dies eine Abwechselung (+ — oder — +) der Zeichen genannt.

Sind die Wurzeln einer quadratischen auf Null gebrachten Gleichung reell, so hat die Gleichung so viele positive Wurzeln, als sie Abwechselung

der Zeichen, und so viele negative Wurzeln, als sie Folgen der Vorzeichen hat. Sind p und q die Wurzeln einer quadratischen Gleichung, so können in Hinsicht der Vorzeichen vier verschiedene Fälle stattfinden.

1) $x = p$, also $x - p = 0$
$x = q$ „ $x - q = 0$,

also auch $(x - p)(x - q) = x^2 - (p + q)x + pq = 0$;

2) $x = -p$, also $x + p = 0$
$x = q$ „ $x - q = 0$,

also auch $(x + p)(x - q) = x^2 + (p - q)x - pq = 0$;

3) $x = p$, also $x - p = 0$
$x = -q$, „ $x + q = 0$,

also auch $(x - p)(x + q) = x^2 - (p - q)x - pq = 0$.

4) $x = -p$, also $x + p = 0$
$x = -q$ „ $x + q = 0$,

also auch $(x + p)(x + q) = x^2 + (p + q)x + pq = 0$.

In jeder dieser vier auf Null gebrachten Gleichungen kommen drei Glieder vor, und nimmt man bloß auf die Vorzeichen Rücksicht, so sind hier in der

1) $+ - +$ zwei Abwechselungen, mithin zwei positive Wurzeln;
2) $+ + -$ } eine Abwechselung und eine Folge, mithin eine posi-
3) $+ - -$ } tive und eine negative Wurzel;
4) $+ + +$ zwei Folgen, mithin zwei negative Wurzeln.

Man ersieht auch aus den obern vier Gleichungen, daß bei jeder quadratischen Gleichung der Coefficient der unbekannten Zahl in der ersten Potenz gleich der Summe der Wurzeln mit entgegengesetzten Zeichen und der Coefficient der unbekannten Zahl in der nullten Potenz gleich dem Produkte der beiden Wurzeln sei. Sind die Wurzeln rational, so lassen sich diese oft leicht finden, wenn man die Coefficienten von x^0 in zwei Faktoren zerlegt und untersucht, welche von ihnen, positiv oder negativ genommen, der Gleichung Genüge leisten. Z. B. $x^2 - 12x + 20 = 0$. Von 20 sind die Faktoren $2 . 10$ oder $1 . 20$ oder $4 . 5$. Nimmt man $x = 2$, so erhält man $4 - 24 + 20 = 0$, also ist 2 eine Wurzel der Gleichung. Dividirt man $x - 2$ in $x^2 - 12x + 20$, so erhält man $x - 10$, folglich ist die zweite Wurzel 10. Oder man zerlegt 20 in solche zwei Faktoren, deren Summe zugleich 12 ist.

Umgekehrt kann man aus den Wurzeln die Gleichung bilden, z. B.

Die Wurzel seien	deren entgegengesetzte Summe	deren Produkt:	so ist die Gleichung:
7 und -9 ...	$+2$	-63 ..	$x^2 + 2x - 63 = 0$
5 und 6	-11	$+30$ ..	$x^2 - 11x + 30 = 0$
-8 und -3 ..	$+11$	$+24$ ..	$x^2 + 11x + 24 = 0$
-8 und 3 ..	$+5$	-24 ..	$x^2 + 5x - 24 = 0$

2. Zus. Eine Gleichung von der Form $x^{2n} + fx^n = g$ läßt sich immer auf eine Gleichung des zweiten Grades zurückführen. Setzt man nämlich $x^n = z$, so verwandelt sich die vorstehende Gleichung in $z^2 + fz = g$, woraus sich ergiebt

$$z = \frac{f \pm \sqrt{f^2 + 4g}}{2}, \text{ folglich } x = \sqrt[n]{\frac{f \pm \sqrt{f^2 + 4g}}{2}}. \text{ z. B.}$$

1) $x^4 - 13x^2 = -36$. Setzt man für $x^2 = z$, so wird

$$z^2 - 13z + \left(\frac{13}{2}\right)^2 = \left(\frac{13}{2}\right)^2 - 36$$

$$z - \frac{13}{2} = \pm\sqrt{\frac{25}{4}}, \text{ also } z = 9 \text{ oder } 4, \text{ folglich}$$

$$x = \pm 3 \text{ oder } \pm 2;$$

2) $x^6 + 5x^3 = 24$. Setzt man für $x^3 = z$, so wird

$$z^2 + 5z + \frac{25}{4} = \frac{121}{4}$$

$$z = \frac{-5 \pm 11}{2}, \text{ also } z = -8 \text{ oder } 3, \text{ folglich}$$

$$x = \sqrt[3]{-8} = -2 \text{ oder } \sqrt[3]{3}.$$

3. Zus. Wenn in einer Gleichung die Unbekannte unter einem Wurzelzeichen vorkommt, so kann man dasselbe entweder dadurch wegschaffen, daß man alle anderen Glieder auf die entgegengesetzte Seite bringt und die ganze Gleichung mit dem Wurzelexponenten potenzirt, oder man setzt für $\sqrt{x} = z$. z. B.

$$a + \sqrt{bx} = cx$$

$$\sqrt{bx} = cx - a$$

$$bx = c^2x^2 - 2acx + a^2$$

$$x^2 - \frac{(2ac + b)x}{c^2} = -\frac{a^2}{c^2}$$

$$x^2 - \frac{(2ac + b)x}{c^2} + \left(\frac{2ac + b}{2c^2}\right)^2 = \frac{4acb + b^2}{4c^4}$$

$$x = \frac{2ac + b \pm \sqrt{4acb + b^2}}{2c^2}.$$

Oder für $\sqrt{x} = z$, so erhält man:

$$a + z\sqrt{b} = cz^2$$

$$z^2 - \frac{z\sqrt{b}}{c} + \left(\frac{\sqrt{b}}{2c}\right)^2 = \frac{a}{c} + \left(\frac{\sqrt{b}}{2c}\right)^2 = \frac{4ac + b}{4c^2}$$

$$z - \frac{\sqrt{b}}{2c} = \pm\sqrt{\frac{4ac + b}{4c^2}}$$

$$z = \frac{\sqrt{b} \pm \sqrt{4ac + b}}{2c}$$

$$x = z^2 = \left(\frac{\sqrt{b} \pm \sqrt{4ac + b}}{2c}\right)^2 = \frac{b \pm 2\sqrt{4acb + b^2} + 4ac + b}{4c^2}$$

$$x = \frac{2ac + b \pm \sqrt{4acb + b^2}}{2c^2}$$

(Aufg. Sammlg. § 33. 38—139 und § 41.)

Auflösung der gemischt quadratischen Gleichungen mittelst der Goniometrie.

Sind die Coefficienten von x^1 und x^0 große Zahlen oder überhaupt complicirte Ausdrücke, so lassen sich die quadratischen Gleichungen mit Hilfe der goniometrischen Funktionen leichter und bequemer als wie oben gezeigt auflösen.

Die allgemeinen Formen aller gemischt quadratischen Gleichungen sind:

1) $x^2 + px = q$
2) $x^2 - px = q$
3) $x^2 + px = -q$
4) $x^2 - px = -q$

Drücken x_1 und x_2 die beiden Werthe für x aus, so ist für die Gleichung:

1) $$x_1 = \frac{-p}{2} + \sqrt{q + \tfrac{1}{4}p^2} = \frac{-p}{2} + \frac{p}{2}\sqrt{\frac{4q}{p^2} + 1} = \frac{p}{2}\left(-1 + \sqrt{1 + \frac{4q}{p^2}}\right)$$

und $$x_2 = \frac{-p}{2} - \sqrt{q + \tfrac{1}{4}p^2} = \frac{-p}{2}\left(1 + \sqrt{1 + \frac{4q}{p^2}}\right).$$

Setzt man für $\frac{4q}{p^2} = tg^2\, 2\varphi$, so ist, da $\sqrt{1 + tg^2 2\varphi} = \frac{1}{\cos 2\varphi}$

(Goniometrie Aufg. 41),

$$x_1 = \frac{p}{2}\left(-1 + \frac{1}{\cos 2\varphi}\right) = \frac{p}{2}\left(\frac{1 - \cos 2\varphi}{\cos 2\varphi}\right) = \frac{p}{2} \cdot \frac{2 \sin\varphi . \sin\varphi}{\cos 2\varphi};$$

multiplicirt man Zähler und Nenner mit $\cos\varphi$, so ist:

$$x_1 = \frac{p}{2} \cdot \frac{2 \sin \varphi \cdot \cos \varphi \cdot \sin \varphi}{\cos 2 \varphi \cdot \cos \varphi} = \frac{p}{2} \operatorname{tg} 2 \varphi . \operatorname{tg} \varphi = \frac{p}{2} \cdot \frac{2\sqrt{q}}{p} \operatorname{tg} \varphi,$$

folglich $\mathbf{x_1 = \sqrt{q} \cdot tg}\, \varphi$.

x_2 nach derselben Entwickelung giebt $\frac{-p}{2}\left(\frac{1+\cos 2\varphi}{\cos 2\varphi}\right)$

$$= \frac{-p . 2\cos\varphi . \cos\varphi . \sin\varphi}{2 . \cos 2\varphi . \sin\varphi} = \frac{-p}{2} \operatorname{tg} 2\varphi . \operatorname{cotg}\varphi = \frac{-p}{2} \cdot \frac{2\sqrt{q}}{p} \operatorname{cotg}\varphi,$$

folglich $\mathbf{x_2} = \frac{-\sqrt{\mathbf{q}}}{\mathbf{tg}\, \varphi}$

2) $x = \frac{p}{2}\left(1 \pm \sqrt{1 + \frac{4q}{p^2}}\right)$. Verfährt man wie in 1), so ist

$$x_1 = \frac{p}{2}\left(\frac{1+\cos 2\varphi}{\cos 2\varphi}\right) = \frac{\sqrt{\mathbf{q}}}{\mathbf{tg}\,\varphi} \text{ und } x_2 = \frac{-p}{2}\left(\frac{1-\cos 2\varphi}{\cos 2\varphi}\right) = -\sqrt{\mathbf{q}} \cdot \mathbf{tg}\,\varphi.$$

3) $x = \frac{p}{2}\left(-1 \pm \sqrt{1 - \frac{4q}{p^2}}\right)$. Enthält x reelle Wurzeln, so muß $\frac{4q}{p^2} < 1$ sein. Man kann also für $\frac{4q}{p^2} = \sin^2 2\varphi$ setzen, so ist:

$$x_1 = \frac{-p}{2}(1 - \cos 2\varphi) = -\sqrt{\mathbf{q}} \cdot \mathbf{tg}\,\varphi \text{ und}$$

$$x_2 = \frac{-p}{2}(1 + \cos 2\varphi) = \frac{-\sqrt{\mathbf{q}}}{\mathbf{tg}\,\varphi}.$$

4) $x = \frac{p}{2}\left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{4q}{p^2}}\right)$. Verfährt man wie in 3), so ist

$$x_1 = \frac{p}{2}\left(\frac{1+\cos 2\varphi}{\cos 2\varphi}\right) = \frac{\sqrt{\mathbf{q}}}{\mathbf{tg}\,\varphi} \text{ und } x_2 = \frac{p}{2}\left(\frac{1-\cos 2\varphi}{\cos 2\varphi}\right) = \sqrt{\mathbf{q}} \cdot \mathbf{tg}\,\varphi.$$

Faßt man diese vier Fälle zusammen, so erhält man für

I) $x^2 \pm px - q = 0$ die Wurzeln $\begin{cases} x_1 = \pm\sqrt{q} . \operatorname{tg}\varphi, \\ x_2 = \pm \frac{\sqrt{q}}{\operatorname{tg}\varphi}, \end{cases}$ wo $\operatorname{tg} 2\varphi = \frac{2\sqrt{q}}{p}$ ist.

II) $x^2 \pm px + q = 0$ die Wurzeln $\begin{cases} x_1 = \mp\sqrt{q} . \operatorname{tg}\varphi, \\ x_2 = \mp \frac{\sqrt{q}}{\operatorname{tg}\varphi}, \end{cases}$ wo $\sin 2\varphi = \frac{2\sqrt{q}}{p}$ ist.

Beispiel: $x^2 - 635{,}784\, x + 100241{,}477 = 0.$

Hier ist $\sin 2\varphi = \frac{2\sqrt{100241,477}}{635,784}$

0,3010300	
2,5005237	$2\varphi = 84^{0}51'3,68''$.
12,8015537—10	
2,8033096	$\varphi = 42^{0}25'31,84''$.
$\log \sin 2\varphi =$ 9,9982441—10	

$x_1 = \sqrt{q} . \operatorname{tg}\varphi =$ **289,363**

$x_2 = \frac{\sqrt{q}}{\operatorname{tg}\varphi} =$ **346,421**

2,5005237	2,5005237
9,9609188—10	9,9609188—10
2,4614425	2,5396049

2. Gleichungen mit mehreren unbekannten Zahlen.

Quadratische Gleichungen mit mehreren unbekannten Zahlen werden auf ähnliche Weise aufgelöst wie die einfachen Gleichungen mit mehreren unbekannten Zahlen.

55. Aufg. Aus der Summe a und dem Produkte b zweier Zahlen diese Zahlen selbst zu finden.

Aufl. Es sei 1) $x + y = a$
2) $xy = b$.

Wir können hier die drei ersten Methoden anwenden.

α) Nach der Eliminationsmethode im engeren Sinne: Man multiplicire 1) mit y und subtrahire 2) von der neuen Gleichung, so erhält man $xy + y^2 - xy = ay - b$, giebt $y^2 - ay = -b$, folglich $y = \frac{a \pm \sqrt{a^2 - 4b}}{2}$. Um x zu erhalten, setze man diesen Ausdruck für y entweder in 1) oder 2) ein, und man erhält alsdann:

$$x = a - \frac{a \pm \sqrt{a^2 - 4b}}{2} = \frac{a \mp \sqrt{a^2 - 4b}}{2} \text{ oder } x = \frac{2b}{a \pm \sqrt{a^2 - 4b}}$$

$$= \frac{2b(a \mp \sqrt{a^2 - 4b})}{4b} = \frac{a \mp \sqrt{a^2 - 4b}}{2}.$$

β) Nach der Substitutionsmethode:

Aus der Gleichung 1) für $x = a - y$ in 2) eingesetzt, giebt $ay - y^2 = b$ oder $y^2 - ay = -b$; die weitere Berechnung wie bei α).

γ) Nach der Comparationsmethode:

Aus 1) ist $x = a - y$ und aus 2) $x = \frac{b}{y}$, also $a - y = \frac{b}{y}$, giebt $ay - y^2 = b$ u. s. w.

δ) Beim Auflösen der Gleichungen des zweiten Grades mit 2 unbekannten Zahlen sucht man gern die Summe und den Unterschied der Unbekannten. In dem vorliegenden Beispiel ist die Summe schon gegeben; um den Unterschied zu finden, erhebe man 1) zur zweiten Potenz und subtrahire davon das vierfache Produkt von 2), so wird $x^2+2xy+y^2-4xy = a^2-4b$, also $x^2-2xy+y^2=a^2-4b$ und $x-y=\pm\sqrt{a^2-4b}$ folglich, da $x+y=a$

$$x - y = \pm\sqrt{a^2-4b}$$

$$x = \frac{a \pm \sqrt{a^2-4b}}{2} \text{ und } y = \frac{a \mp \sqrt{a^2-4b}}{2}.$$

Anmerkung. Welche Methode am bequemsten anzuwenden sei, läßt sich nur durch Uebung bestimmen.

z. B. $x+y=22$, $xy=105$ | $x(22-x)=105$, $x^2-22x+11^2=121-105=16$ | $x=15$ oder 7, $y=7$ oder 15.

Oder $(x+y)^2=22^2$, $4xy=420$ | $x^2-2xy+y^2=64$, $x-y=\pm 8$ | $x+y=22$, $x-y=\pm 8$

$x = 15$ oder 7

$y = 7$ oder 15.

56. Aufg. Aus der Summe a zweier Zahlen und der Summe ihrer Quadrate b die Zahlen selbst zu finden.

Aufl. Es sei $x+y=a$

$x^2+y^2=b$.

Bestimmt man y aus der ersten Gleichung und setzt den Werth in die zweite, so erhält man:

$$x^2 + (a-x)^2 = b$$

$$\text{folglich } x = \frac{a \pm \sqrt{2b-a^2}}{2}$$

$$y = \frac{a \mp \sqrt{2b-a^2}}{2}.$$

Oder man erhebt $x+y$ zur zweiten Potenz und zieht diese neue Gleichung von $2(x^2+y^2)$ ab, als $2x^2+2y^2=2b$

$$x^2+2xy+y^2=a^2$$

$$x^2-2xy+y^2=2b-a^2$$

$$x-y=\pm\sqrt{2b-a^2}.$$

Nun ist $x+y=a$

$x-y=\pm\sqrt{2b-a^2}$, folglich

$$x = \frac{a \pm \sqrt{2b - a^2}}{2}$$

$$y = \frac{a \mp \sqrt{2b - a^2}}{2}.$$

z. B. 1)

$$\begin{array}{l|l|l} x + y = 9 & 2x^2+2y^2 = 82 & x + y = 9 \\ x^2+y^2 = 41 & x^2+2xy+y^2 = 81 & x - y = \pm 1 \\ \hline & x^2-2xy+y^2 = 1 & x = 5 \text{ oder } 4 \\ & & y = 4 \text{ oder } 5. \end{array}$$

2)

$$\begin{array}{l|l} 2x - 3y = 18 & y = \frac{2x - 18}{3} \\ x^2 + y^2 = 360 & x^2 + \left(\frac{2x - 18}{3}\right)^2 = 360 \end{array}$$

$$x^2 - \frac{72}{13}x + \left(\frac{36}{13}\right)^2 = \frac{2916}{13} + \frac{1296}{13^2}$$

$$x = 18 \text{ oder } - 12^6/_{13}$$

$$y = 6 \text{ oder } - 14^4/_{13}.$$

57. Aufg. Wenn das Produkt a und die Summe der Quadrate b zweier Zahlen gegeben ist, diese Zahlen selbst zu finden.

Aufl. Es sei $xy = a$

$$x^2 + y^2 = b$$

Man suche die Summe und den Unterschied der beiden Zahlen.

$$\begin{array}{l|l} x^2 + 2xy + y^2 = b + 2a & x + y = \pm\sqrt{b + 2a} \\ x^2 - 2xy + y^2 = b - 2a & x - y = \pm\sqrt{b - 2a} \end{array}$$

$$x = \frac{\pm\sqrt{b + 2a} \pm \sqrt{b - 2a}}{2}$$

$$y = \frac{\pm\sqrt{b + 2a} \mp \sqrt{b - 2a}.}{2}$$

z. B.

$$\begin{array}{l|l|l} xy = -18 & x^2 + 2xy + y^2 = 9 & x + y = \pm 3 \\ x^2+y^2 = 45 & x^2 - 2xy + y^2 = 81 & x - y = \pm 9 \end{array}$$

$$x = \pm 6 \text{ oder } \mp 3$$

$$y = \mp 3 \text{ oder } \pm 6.$$

58. Aufg. Die Gleichungen $x + y = a$ und $x^2 + y^2 + xy = b$ aufzulösen.

Aufl. Es ist $x^2 + y^2 + 2xy = a^2$

$$x^2 + y^2 + xy = b$$

$$xy = a^2 - b,$$

wodurch diese Aufgabe auf Aufgabe 55 zurückgeführt ist.

59. Aufg. Die Gleichungen $x + y + x^2 + y^2 = a$ und $x - y + x^2 - y^2 = b$ aufzulösen.

Aufl. Durch Addition und Subtraktion dieser Gleichungen erhält man $2x^2 + 2x = a + b$

$$2y^2 + 2y = a - b,$$

quadratische Gleichungen mit einer unbekannten Zahl

60. Aufg. Wenn die Summe zweier Zahlen und die Summe ihrer Cuben gegeben ist, diese Zahlen zu finden.

Aufl. Es sei $x + y = a$

$$x^3 + y^3 = b.$$

Dividirt man mit der ersten Gleichung in die zweite und quadrirt die erste, so ergiebt sich:

$$x^2 - xy + y^2 = \frac{b}{a}$$

$$x^2 + 2xy + y^2 = a^2.$$

Subtrahirt man die obere Gleichung von der unteren, so erhält man:

$$3\,xy = a^2 - \frac{b}{a}.$$

Gegeben ist: $x + y = a$,

es ist somit die Aufgabe wieder auf die Aufgabe 55 zurückgeführt.

Oder man substituirt x aus der ersten Gleichung in die zweite, so erhält man: $a^3 - 3a^2y + 3ay^2 = b$, also $y^2 - ay + \frac{a^2}{4} = \frac{4b - a^3}{12a}$,

folglich $y = \frac{a \pm \sqrt{\frac{4b - a^3}{3a}}}{2}$ und $x = \frac{a \pm \sqrt{\frac{4b - a^3}{3a}}}{2}$.

61. Aufg. Es werden zwei Zahlen gesucht, deren Summe mit der Summe ihrer Quadrate multiplicirt die Zahl a, und deren Differenz mit der Differenz ihrer Quadrate multiplicirt die Zahl b giebt.

Aufl. Es sei $(x + y)(x^2 + y^2) = a$

$$(x - y)(x^2 - y^2) = b.$$

Man setze $x + y = s$ und $xy = p$, so ist

$$x^2 + 2xy + y^2 = s^2$$

$$x^2 + y^2 = s^2 - 2p$$

$$(x - y)^2 = x^2 + y^2 - 2xy = s^2 - 4p.$$

Da $(x-y)(x^2-y^2) = (x-y)(x-y)(x+y) = (x-y)^2(x+y)$,

so ist: $s(s^2 - 2p) = a$

$$s^2 - 2p = \frac{a}{s}$$

$$2s^2 - 4p = \frac{2a}{s}$$

und $s(s^2 - 4p) = b$

$$s^2 - 4p = \frac{b}{s};$$

subtrahirt man die beiden Gleichungen:

$$2s^2 - 4p = \frac{2a}{s}$$

$$\text{und } s^2 - 4p = \frac{b}{s},$$

so ist $s^2 = \frac{2a - b}{s}$ oder $s^3 = 2a - b$ und $s = \sqrt[3]{2a - b}$.

Hat man so s gefunden, so ergiebt sich p aus der Formel $s^2 - 2p = \frac{a}{s}$, $p = \frac{s^3 - a}{2s} = 2\frac{a - b}{\sqrt[3]{2a - b}}$.

Man hat also jetzt die beiden Gleichungen $x + y = s$, $xy = p$, aus denen, weil s und p bekannte Zahlen sind, x und y wieder nach Aufgabe 55 gefunden werden können.

(Aufg. Sammlg. § 34. 1—81; § 35. 28—37 und § 42.)

Dritter Abschnitt.

Die unbestimmten (diophantischen) Gleichungen des ersten Grades mit zwei Unbekannten.

§ 58. Erklärung. Enthält eine algebraische Aufgabe mehr unbekannte Größen als Gleichungen, so ist sie unbestimmt; es können nämlich, wenn m Gleichungen gegeben sind und n unbekannte Größen vorkommen wo $n > m$ ist, für $n - m$ dieser unbekannten Größen beliebige We gesetzt werden. Diese Werthe sind aber entweder innerhalb gewisser G

zen eingeschlossen, oder von einer bestimmten Form abhängig. Die unbestimmten Gleichungen sind ebenfalls entweder Gleichungen des ersten oder eines höheren Grades; sie enthalten entweder zwei oder mehrere unbekannte Größen. Wir betrachten hier nur Gleichungen des ersten Grades mit zwei Unbekannten. Bei diesen ist gewöhnlich die Bedingung hinzugefügt, daß die gesuchten Größen sämmtlich ganze positive Zahlen sein sollen.

§ 59. Solche Gleichungen fallen unter die allgemeine Form $ax \pm by = k$. Hier werden unter a, b, k ganze Zahlen verstanden, von denen die beiden ersten keinen gemeinschaftlichen Faktor haben dürfen, wenn nicht k durch den nämlichen Faktor (f) theilbar ist, weil der Quotient $\frac{k}{f}$ die Forderung, für x und y nur ganze Zahlen aufzufinden, ungereimt machen würde; es müssen also a und b relative Primzahlen sein, wenn eine Auflösung in ganzen Zahlen möglich werden soll.

62. Aufg. Die Gleichung $ax \pm by = k$ aufzulösen.

Aufl. 1) Ist $k=0$, also $ax-by=0$, so ist $x = \frac{by}{a}$, man erhält für x und y eine unbegränzte Menge, indem man für y jedes beliebige Vielfache von a substituiren darf, um ganze Zahlenwerthe für x zu erhalten.

2) Ist k nicht gleich Null, so wendet man gewöhnlich zwei Auflösungsmethoden an.

1. Durch Kettenbrüche.

Es sei die Gleichung 2) $ax - by = k$. Man suche aus den Coefficienten von x und y einen Kettenbruch zu bilden und ziehe den letzten Näherungswerth $\frac{\alpha}{\beta}$ von seinem vollständigen Werthe $\frac{a}{b}$ ab. Man erhält alsdann $\frac{a}{b} - \frac{\alpha}{\beta} = \frac{a\beta - \alpha b}{b\beta} = \pm \frac{1}{b\beta}$ oder $a\beta - \alpha b = \pm 1$; multiplicirt man beide Seiten mit $\pm k$, so erhält man $a(\pm k\beta) - b(\pm k\alpha) = k$. Vergleichen wir diese Gleichung mit der gegebenen, so finden wir $x = \pm k\beta$ und $y = \pm k\alpha$. Da aber die Unbekannten in der Regel mehrere Werthe zulassen und negative der Forderung nicht genügen, so muß man, um die vollständige Form ihrer Werthe zu erhalten, ein Vielfaches vom Produkt der beiderseitigen Coefficienten darin aufnehmen. Dies geschieht, indem ein beliebiges Vielfaches, z. B. das f-fache, dieses Produktes einmal addirt und wieder subtrahirt wird, also $a(\pm k\beta) + abf - b(\pm k\alpha) - abf = k$. Aus den beiden ersten Gliedern dieses Polynoms kann man a und aus

den beiden letzten $-b$ ausheben, folglich $a(bf \pm k\beta) - b(af \pm k\alpha) = k$, dann ist $x = bf \pm k\beta$ und $y = af \pm k\alpha$; f bedeutet jede positive ganze Zahl und ist so zu wählen, daß x und y positive Werthe erhalten.

Beispiel. $34x - 41y = 3$. Der letzte Näherungswerth von $\frac{34}{41}$ ist $\frac{5}{6}$ also $\frac{34}{41} - \frac{5}{6} = -\frac{1}{41.6}$ oder $34.6 - 41.5 = -1$, mit -3 multiplicirt, giebt $34(-18) - 41(-15) = 3$ und $34(-18) + 34.41f - 41(-15) - 41.34f = 3$, oder $34(41f - 18) - 41(34f - 15) = 3$. Also ist $x = 41f - 18$ und $y = 34f - 15$. Setzt man für f—1,2,3....., so erhält man für $x = 23, 64, 105......$

und $y = 19, 53, 87......$

Wäre hingegen die Form der gegebenen Gleichung 3) $ax + by = k$, so verfährt man ebenso, nur muß das zweite Glied der obigen Differenz positiv gemacht werden; z. B. $34x + 41y = 3$. Man verfahre wie oben, so erhält man $34(-18) + 41(15) = 3$ und $34(--18) + 34.41f + 41(15) - 41.34f$ giebt $34(41f - 18) + 41(15 - 34f) = 3$; es ist also $x = 41f - 18$ und $y = 15 - 34f$. Was man auch für f setzt, x und y können nicht zugleich positive Werthe erhalten, was man schon aus der gegebenen Gleichung ersehen kann, da x und y ganze Zahlen sein sollen.

2. Durch Division.

Es sei $34x - 41y = 3$, so ist $x = \frac{3 + 41y}{34} = y + \frac{3 + 7y}{34}$, setzt man für $\frac{3+7y}{34} = t$, wobei t eine ganze Zahl werden soll, so ist $y = 4t + \frac{6t-3}{7} = 4t + \frac{3(2t-1)}{7}$ und ist $\frac{2t-1}{7} = u$, so ist $t = 3u + \frac{u+1}{2}$, und ist $\frac{u+1}{2} = f$, so ist $u = 2f - 1$.

Also ist $x = y + t = 41f - 18$ und $y = 4t + 3u = 34f - 15$, wie oben.

Es sei $34x + 41y = 3$, so ist $x = \frac{3 - 41y}{34} = -y + \frac{3 - 7y}{34}$, setzt man für $\frac{3-7y}{34} = t$, so ist $y = -4t + \frac{3-6t}{7} = -4t - \frac{3(2t-1)}{7}$ und ist $\frac{2t-1}{7} = u$, so ist $t = 3u + \frac{u+1}{2}$ und für $\frac{u+1}{2} = f$, so ist $u = 2f - 1$. Also ist $x = -y + t = 41f - 18$ und $y = -4t - 3u = 15 - 34f$, ebenfalls wie oben.

(Aufg. Sammlg. § 36. 4 — 13 und § 43.)

Vierter Abschnitt.

Die Reihen oder Progressionen.

§ 60. Erklärung. Wenn in einer Gleichung die Glieder der einen Seite nach einem gewissen Gesetze fortschreiten, so nennt man eine solche Gleichung eine Reihe oder Progression.

§ 61. Wir betrachten hier besonders zwei Arten von Reihen.

1) Eine Reihe, in welcher jedes Glied das vorhergehende um gleich viel übertrifft oder von ihm übertroffen wird, heißt eine Differenzreihe (arithmetische Progression) [18]. So bilden die Zahlen $1+4+7+10 \ldots$ eine Differenzreihe. Es ist klar, daß das zweite Glied gleich dem ersten plus einmal die Differenz ist, das dritte gleich dem zweiten plus einmal die Differenz, oder gleich dem ersten plus zweimal die Differenz ꝛc. Ueberhaupt ist jedes Glied einer Differenzreihe gleich dem ersten plus so viel mal die Differenz als Glieder vorhergehen. Bedeutet a das erste Glied, d die Differenz, n die Anzahl der Glieder und s die Summe der ganzen Reihe, so ist

$$s = a + [a+d] + [a+2d] + [a+3d] \ldots + [a+(n-2)d] + [a+(n-1)d].$$

2) Eine Reihe, in welcher jedes Glied das vorhergehende gleichvielmal enthält oder in ihm enthalten ist, heißt eine Quotientenreihe oder Verhältnißreihe (geometrische Progression). So bilden die Zahlen $1+3+9+27 \ldots$ eine Quotientenreihe. Das zweite Glied ist gleich dem ersten, multiplicirt mit dem Quotienten; das dritte gleich dem zweiten, multiplicirt mit dem Quotienten u. s. w. Ueberhaupt ist jedes Glied einer Quotientenreihe ein Produkt aus zwei Faktoren, von denen der eine das erste Glied und der andere eine Potenz des Quotienten ist, deren Exponent durch die Zahl der vorhergehenden Glieder angedeutet wird. Bedeutet a das erste Glied, e den Quotienten, n die Anzahl der Glieder und s die Summe aller Glieder, so ist

$$s = a + ae + ae^2 \ldots + ae^{n-2} + ae^{n-1}.$$

1. Die Differenzreihe.

§ 62. Aus § 61 folgt die allgemeine Formel für die Differenzreihe $s = a + [a+d] + [a+2d] \ldots + [a+(n-2)d] + [a+(n-1)d]$.

[18]) Die ersten arithmetischen Reihen finden sich schon in Stiefel's Arithmetica integra 1544.

Ist d positiv, so heißt die Reihe eine steigende, ist d negativ, eine fallende. $a+(n-1)d$ heißt das (letzte) allgemeine Glied, weil durch diesen Ausdruck jedes Glied einer Reihe gefunden werden kann; es wird mit t bezeichnet. In der Gleichung $s=a+[a+d].....+[a+(n-1)d]$ kommen 5 Größen vor: a, d, n, t und s; sind von diesen 3 bekannt, so sind zwei Gleichungen nöthig, um die beiden anderen unbekannten zu finden.

63. Aufg. Zwischen a, d, n, t und s zwei algebraische Gleichungen zu bilden, wenn n eine ganze positive Zahl ist.

Aufl. Die erste Gleichung ist $t=a+(n-1)d$; die zweite findet man folgendermaßen aus $s=a+[a+d]+[a+2d]......+[a+(n-1)d]$. Schreibt man die Glieder dieser Reihe in umgekehrter Ordnung, also $s=[a+(n-1)d]+[a+(n-2)d]+[a+(n-3)d]...+[a+d]+a$, und addirt die gleichstelligen Glieder beider Gleichungen, so erhält man
$2s=[2a+(n-1)d]+[2a+(n-1)d]+[2a+(n-1)d].....+[2a+(n-1)d]$.
Die rechte Seite dieser Gleichung enthält n gleiche Summanden, folglich ist $2s=n[2a+(n-1)d]$, und man erhält die zweite Gleichung

$s=[2a+(n-1)d]\frac{n}{2}$ oder $s=(a+t)\frac{n}{2}$. Vermittelst dieser zwei Gleichungen können, wenn 3 Größen gegeben sind, die beiden anderen berechnet werden.

64. Aufg. Zwischen a, d, n, t und s zwei algebraische Gleichungen für t und s zu bilden, wenn n eine gemischte positive Zahl $=m+\frac{p}{r}$ ist.

Aufl. Hier können zwei Fälle eintreten, entweder 1) enthält jedes Glied a, $a+d$, $a+2d$..... (Hauptreihe) wieder eine Differenzreihe (zerlegte Reihe), aber so, daß das Ganze (s) eine Differenzreihe bildet oder 2) zwischen je zwei auf einander folgende Glieder, als zwischen a und $a+d$ oder $a+d$ und $a+2d$.... soll eine Differenzreihe eingeschoben werden, doch so daß die eingeschalteten Glieder mit den beiden einschließenden wieder eine Differenzreihe bilden. Dieses Verfahren nennt man Interpoliren *).

Betrachten wir den ersten Fall, so wird jedes Glied, also a oder $a+d$..... aus r Gliedern bestehen, es werden also im Ganzen $mr+p$ Glieder vorhanden sein. Nennt man nun das erste Glied α, die Differenz δ, so ist die Reihe wie folgt:

---

*) Siehe „Ueber die mathematische Auflösung einiger Probleme der Naturlehre, welche auf Progressionen mit gebrochenen Indices führen." Von Dr. Carl Hechel. Im Korrespondenzblatt des Naturforschenden Vereins zu Riga, Jahrgang XI, Nr. 6.

$s = \alpha + [\alpha + \delta] + [\alpha + 2\delta] \ldots\ldots + [\alpha + (r-1)\delta] + [\alpha + r\delta] + [\alpha + (r+1)\delta] \ldots\ldots$
$\ldots\ldots + [\alpha + (2r-1)\delta] + [\alpha + 2r\delta] + [\alpha + (2r+1)\delta] \ldots\ldots + [\alpha + (3r-1)\delta] \ldots\ldots$
$\ldots\ldots + [\alpha + (m-1)r\delta] + [\alpha + ((m-1)r+1)\delta] \ldots\ldots + [\alpha + (mr-1)\delta] +$
$[\alpha + mr\delta] + [\alpha + (mr+1)\delta] \ldots\ldots + [\alpha + (mr+p-1)\delta].$

Betrachtet man die einzelnen Glieder der Hauptreihe, so ist:

$$a = \alpha + [\alpha + \delta] + [\alpha + 2\delta] \ldots\ldots [\alpha + (r-1)\delta] = [2\alpha + (r-1)\delta \frac{r}{2}$$

$$a + d = [\alpha + r\delta] + [\alpha + (r+1)\delta] \ldots\ldots + [\alpha + (2r-1)\delta] = [2\alpha + (3r-1)\delta] \frac{r}{2}$$

$$a + 2d = [\alpha + 2r\delta] + [\alpha + (2r+1)\delta] \ldots + [\alpha + (3r-1)\delta] = [2\alpha + (5r-1)\delta] \frac{r}{2}$$

$$\vdots$$

$$a + (m-1)d = [\alpha + (m-1)r\delta] + [\alpha + ((m-1)r+1)\delta] \ldots + [\alpha + (mr-1)\delta]$$
$$= [2\alpha + ((2m-1)r-1)\delta] \frac{r}{2}$$

Und die p Glieder der zerlegten Reihe in dem $(m + 1)$ten Gliede die Hauptreihe sind $= [\alpha + mr\delta] + [\alpha + (mr+1)\delta] \ldots + [\alpha + (mr+p-1)\delta]$

$$= [2\alpha + (2mr+p-1)\delta] \frac{p}{2}.$$

Aus je zwei Gleichungen findet man α und δ, z. B.

$$a + d = [2\alpha + (3r-1)\delta] \frac{r}{2} \text{ und}$$

$$a = [2\alpha + (r-1)\delta] \frac{r}{2},$$

subtrahirt man die untere Gleichung, so ist

$$d = r^2 \delta, \text{ folglich } \delta = \frac{d}{r^2} \text{ und } \alpha = \frac{2ar - (r-1)d}{2r^2}.$$

Also ist das letzte Glied der Reihe $= [2r(a + md) + d(p - r)] \frac{p}{2r^2}$,

$$\text{und } s = [2\alpha + (mr+p-1)\delta] \frac{mr+p}{2} = \left[2ar - (r-1)d + (mr+p-1)\frac{d}{r^2}\right] \frac{mr+p}{2}$$
$$= \left[2a + \left(\frac{mr+p}{r} - 1\right) d\right] \frac{mr+p}{2r}.$$

Diese Formel erhält man auch, wenn man bei Aufg. 63 in

$$s = [2a + (n-1)d] \frac{n}{2} \text{ für } n = m + \frac{p}{r} \text{ setzt.}$$

Im zweiten Fall, wo zwischen a und a+d oder zwischen a+d und a+2d....(r—1) Glieder interpolirt werden sollen, wird die Reihe folgende sein:

$a+(a+\delta)+(a+2\delta)\ldots+[a+(r-1)\delta]$ und $a+r\delta=a+d$, folglich ist $\delta=\frac{d}{r}$. Die Reihe wird nun heißen:

$$s=a+[a+d]+[a+2d]\ldots+[a+(m-1)d]+[a+(m-1)d+\frac{d}{r}]$$

$$+\left[a+(m-1)d+\frac{2d}{r}\right]\ldots\ldots+\left[a+(m-1)d+\frac{pd}{r}\right].$$

Es wird also das $\left(m+\frac{p}{r}\right)$te Glied $=a+(m-1)d+\frac{pd}{r}=a+(m+\frac{p}{r}-1)d$ sein. Diese Formel erhalte ich auch, wenn ich bei Aufg. 63 in $t=a+(n-1)d$ für $n=m+\frac{p}{r}$ setze.

Die Summe hingegen ist eine andere als in Aufg. 63, da die Reihe aus zwei verschiedenen Differenzreihen besteht. Es ist also:

$$s=[2a+(m-1)d]\frac{m}{2}+\left[2a+2(m-1)d+(p+1)\frac{d}{r}\right]\frac{p}{2} \text{ oder}$$

$$=a(m+p)+\frac{d}{2}(m-1)(m+2p)+\frac{dp}{2r}(p+1).$$

Oder $s=a+[a+d]\ldots+t+\left[t+\frac{d}{r}\right]+\left[t+\frac{2d}{r}\right]\ldots+\left[t+\frac{pd}{r}\right]$

$$=(a+t)\frac{m}{2}+\left[2t+(p+1)\frac{d}{r}\right]\frac{p}{2}=\frac{ma}{2}+(m+2p)\frac{t}{2}+(p+1)\frac{dp}{2r}.$$

Beispiele. Wenn ein Körper in der ersten Sekunde seiner Bewegung einen Fuß, in jeder folgenden aber 3 Fuß zurücklegt, welchen Raum durchläuft er in der $5^3/_4$ten Sekunden und wie viel in $5^3/_4$ Sekunden? Hier ist $a=1$, $d=3$, $m=5$, $p=3$ und $r=4$, folglich der Raum in der $5^3/_4$ten Sekunde $=15^1/_4$ Fuß, und der Raum in $5^3/_4$ Sekunden

$$=[2a+(m-1)d]\frac{m}{2}+\left[a+(m-1)d+\frac{pd}{r}\right]$$

$$=(m+1)a+\frac{(m+2)(m-1)d}{2}+\frac{pd}{r}=50^1/_4 \text{ Fuß.}$$

2) Ein Körper fällt in $4^1/_4$ Sekunden von der Spitze eines Thurmes zur Erde herab und legt in der ersten Sekunde $15^5/_8$ Fuß, in jeder folgenden aber $31^1/_4$ Fuß mehr als in der nächstvorhergehenden zurück. Welchen Raum durchläuft er in der letzten Sekunde seiner Bewegung und 2) wie hoch ist der Thurm?

1) $117^3/_{16}$ Fuß und 2) $367^3/_{16}$ Fuß.

(Aufg. Sammlg. § 44. 5—38 und 69—82.)

2. Quotientenreihe oder Verhältnißreihe.

§ 63. Betrachtet man die Quotientenreihe aus § 61, 2): $s=a+ae+ae^2+ae^3\ldots\ldots+ae^{n-1}$, so ergiebt sich, daß je drei auf einander folgende Glieder immer eine stetige Proportion bilden, deshalb heißt sie auch Verhältnißreihe. Ist e größer als 1, so heißt die Reihe eine steigende, hingegen wenn e kleiner als 1 ist, eine fallende. ae^{n-1} heißt das allgemeine oder letzte Glied, und wird durch t bezeichnet. In dieser Gleichung kommen 5 Größen: a, e, n, t und s, vor; sind 3 von diesen bekannt, so kann man durch algebraische Gleichungen die beiden anderen finden.

65. Aufg. Zwischen a, e, n, t und s zwei algebraische Gleichungen zu bilden, wenn n eine ganze positive Zahl ist.

Aufl. Die erste Gleichung ist $t=ae^n-1$. Um die zweite Gleichung zu erhalten, multiplicire man die Quotientenreihe $s=a+ae\ldots\ldots$ mit e und subtrahire von dieser neu erhaltenen Gleichung die ursprüngliche, also

$$se=ae+ae^2+ae^3\ldots\ldots+ae^{n-2}+ae^{n-1}+ae^n$$
$$s=a+ae+ae^2+ae^3\ldots\ldots+ae^{n-2}+ae^{n-1}$$

$se-s=-a+ae^n$, so ist $s=\frac{ae^n-a}{e-1}=\frac{a(e^n-1)}{e-1}$ oder $s=\frac{te-a}{e-1}$.

Vermittelst dieser zwei Gleichungen können, wenn 3 Größen gegeben sind, die beiden anderen berechnet werden.

66. Aufg. Zwischen a, e, t, n und s zwei algebraische Gleichungen für t und s zu bilden, wenn n eine gemischte positive Zahl $=m+\frac{p}{r}$ ist.

Aufl. Auch hier kann die Hauptreihe 1) in eine zerlegte Reihe nach r umgeformt oder 2) die Hauptreihe interpolirt werden.

1) $s=\alpha+\alpha\varepsilon+\alpha\varepsilon^2+\alpha\varepsilon^3\ldots\ldots+\alpha\varepsilon^{r-1}+\alpha\varepsilon^r\ldots\ldots+\alpha\varepsilon^{2r-1}+\alpha\varepsilon^{2r}\ldots\ldots+\alpha\varepsilon^{3r-1}\ldots\ldots$
$\ldots\ldots+\alpha\varepsilon^{mr-1}+\alpha\varepsilon^{mr}\ldots\ldots+\alpha\varepsilon^{mr+p-1}$.

Betrachtet man die einzelnen Glieder der Hauptreihe, so ist:

$$a=\alpha+\alpha\varepsilon\ldots\ldots+\alpha\varepsilon^{r-1}=\frac{\alpha(\varepsilon^r-1)}{\varepsilon-1}$$

$$ae=\alpha\varepsilon^r+\alpha\varepsilon^{r+1}\ldots\ldots+\alpha\varepsilon^{2r-1}=\frac{\alpha\varepsilon^r(\varepsilon^r-1)}{\varepsilon-1}$$

$\vdots$

$$ae^{m-1}=\alpha\varepsilon^{(m-1)r}+\alpha\varepsilon^{(m-1)r+1}\ldots\ldots+\alpha\varepsilon^{mr-1}=\frac{\alpha\varepsilon^{(m-1)r}(\varepsilon^r-1)}{\varepsilon-1}.$$

Die p Glieder der zerlegten Reihe im (m+1)ten Gliede der Hauptreihe sind $=\alpha\varepsilon^{mr}+\alpha\varepsilon^{mr+1}\ldots\ldots+\alpha\varepsilon^{mr+p-1}=\frac{\alpha\varepsilon^{mr}(\varepsilon^p-1)}{\varepsilon-1}$.

Aus je zwei Gleichungen findet man α und ε, z. B.

$$ae = \frac{\alpha\varepsilon^r(\varepsilon^r-1)}{\varepsilon-1}$$

$$a = \frac{\alpha(\varepsilon^r-1)}{\varepsilon-1}.$$

Dividirt man die obere Gleichung durch die untere, so ist:

$$e = \varepsilon^r, \text{ folglich } \varepsilon = e^{\frac{1}{r}} \text{ und } \alpha = \frac{a(e^{\frac{1}{r}}-1)}{e-1}.$$

Also ist das letzte Glied der Reihe

$$= \frac{a(e^{\frac{1}{r}}-1).e^m(e^{\frac{p}{r}}-1)}{(e-1)(e^{\frac{1}{r}}-1)} = \frac{a(e^{m+\frac{p}{r}}-e^m)}{e-1} \text{ und}$$

$$s = \frac{\alpha(\varepsilon^{mr+p}-1)}{\varepsilon-1} = \frac{a(e^{m+\frac{p}{r}}-1)}{e-1};$$ dieselbe Formel wie in Aufg. 65.

2) Im zweiten Falle, wo zwischen a und ae.....(r—1) Glieder interpolirt werden sollen, wird die Reihe heißen:

$a+a\varepsilon+a\varepsilon^2......+a\varepsilon^{r-1}......$ und $a\varepsilon^r = ae$, folglich $\varepsilon = e^{\frac{1}{r}}$.

Die Reihe lautet nun, wenn ich $\varepsilon = e^{\frac{1}{r}}$ einsetze:

$$s = a+ae+ae^2.....+ae^{m-1}+ae^{m-1}.e^{\frac{1}{r}}+ae^{m-1}.e^{\frac{2}{r}}.....+ae^{m-1}.e^{\frac{p}{r}}.$$

Es ist also das letzte Glied der Reihe $= ae^{m-1}.e^{\frac{p}{r}} = ae^{\frac{(m-1)r+p}{r}}$

Auch hier ist dieselbe Formel wie in Aufg. 65, wenn man für $n = m+\frac{p}{r}$ setzt. Die Summe hingegen ist eine andere, da die Reihe aus zwei verschiedenen Quotientenreihen besteht. Es ist nehmlich

$$s = \frac{ae^m-a}{e-1} + \frac{ae^{m-1+\frac{1}{r}}(e^{\frac{p}{r}}-1)}{e^{\frac{1}{r}}-1}$$

(Aufg. Sammlg. § 44. 43—68 und 83—96.)

3. Höhere Differenzreihen.

§ 64. Durch die allmählige Summirung der Einheit ist die allgemeine Zahlenreihe $s_1 = 1+2+3+4 \ldots\ldots + (n-1) + n$ entstanden, welche eine Differenzreihe bildet. Durch das allmähliche Summiren der Glieder dieser Reihe s_1 erhalten wir:

$$\begin{aligned} 1 &= 1 \\ 1+2 &= 3 \\ 1+2+3 &= 6 \\ 1+2+3+4 &= 10. \end{aligned}$$

Diese Summen können wir auch durch Produkte darstellen. Multiplicirt man jedes Glied der Differenzreihe s_1 mit $^2/_2$, so erhält man:

$$s_1 = \frac{1.2}{2} + \frac{2.2}{2} + \frac{3.2}{2} + \frac{4.2}{2} \ldots\ldots + \frac{(n-1)2}{2} + \frac{n.2}{2}.$$

Diese Glieder allmählig summirt, giebt:

$$\begin{aligned}
&\text{1tes Glied } \frac{1.2}{2} = 1; \\
&\text{2tes } „ \quad \frac{1.2}{2} + \frac{2.2}{2} = \frac{2.(1+2)}{2} = \frac{2.3}{1.2} = 3; \\
&\text{3tes } „ \quad \frac{1.2}{2} + \frac{2.2}{2} + \frac{3.2}{2} = \frac{2.3}{2} + \frac{3.2}{2} = \frac{3(2+2)}{1.2} = \frac{3.4}{1.2} = 6; \\
&\text{4tes } „ \quad \frac{3.4}{1.2} + \frac{4.2}{2} = \frac{4(3+2)}{1.2} = \frac{4.5}{1.2} = 10; \\
&\vdots \\
&\text{(n—1)te } „ \quad \frac{(n-2)(n-1)}{1.2} + \frac{(n-1)2}{2} = \frac{(n-1)(n-2+2)}{1.2} = \frac{(n-1)n}{1.2}; \\
&\text{nte } „ \quad \frac{(n-1)n}{1.2} + \frac{n.2}{2} = \frac{n(n-1+2)}{1.2} = \frac{n(n+1)}{1.2}.
\end{aligned}$$

Also

$$s_2 = \frac{1.2}{1.2} + \frac{2.3}{1.2} + \frac{3.4}{1.2} + \frac{4.5}{1.2} \ldots\ldots + \frac{(n-1)n}{1.2} + \frac{n(n+1)}{1.2}$$

$$= 1+3+6+10+15 \ldots\ldots + \frac{n(n+1)}{1.2}.$$

Fährt man auf diese Weise mit der Summirung fort, so erhält man folgende Reihe

$$\begin{aligned} 1 &= 1 \\ 1+3 &= 4 \\ 1+3+6 &= 10 \\ 1+3+6+10 &= 20 \text{ u. s. w.} \end{aligned}$$

Wollen wir diese Summen wieder durch Produkte darstellen, so multiplicirt man jedes Glied der Reihe s_2 mit $^3/_3$, so erhält man:

$$s_2 = \frac{1.2.3}{1.2.3} + \frac{2.3.3}{1.2.3} + \frac{3.4.3}{1.2.3} + \frac{4.5.3}{1.2.3} \cdots + \frac{(n-1)n.3}{1.2.3} + \frac{n(n+1).3}{1.2.3}.$$

Durch die allmählige Summirung giebt

1stes Glied $\frac{1.2.3}{1.2.3} = 1;$

2tes „ $\frac{1.2.3}{1.2.3} + \frac{2.3.3}{1.2.3} = \frac{2.3(1+3)}{1.2.3} = \frac{2.3.4}{1.2.3} = 4;$

3tes „ $\frac{2.3.4}{1.2.3} + \frac{3.4.3}{1.2.3} = \frac{3.4(2+3)}{1.2.3} = \frac{3.4.5}{1.2.3} = 10;$

4tes „ $\frac{3.4.5}{1.2.3} + \frac{4.5.3}{1.2.3} = \frac{4.5(3+3)}{1.2.3} = \frac{4.5.6}{1.2.3} = 20;$

⋮

(n—1)te „ $\frac{1.2.3}{1.2.3} + \frac{2.3.3}{1.2.3} \cdots + \frac{(n-1)n.3}{1.2.3} = \frac{(n-2)(n-1)n}{1.2.3} + \frac{n(n-1)(n-2+3)}{1.2.3} = \frac{(n-1)n(n+1)}{1.2.3};$

nte „ $\frac{1.2.3}{1.2.3} + \cdots + \frac{n(n+1)3}{1.2.3} = \frac{(n-1)n(n+1)}{1.2.3} + \frac{n(n+1)3}{1.2.3}$

$$= \frac{n(n+1)(n-1+3)}{1.2.3} = \frac{n(n+1)(n+2)}{1.2.3}.$$

Also $s_3 = \frac{1.2.3}{1.2.3} + \frac{2.3.4}{1.2.3} + \frac{3.4.5}{1.2.3} + \frac{4.5.6}{1.2.3} \cdots + \frac{n(n+1)(n+2)}{1.2.3}$

$$= 1+4+10+20+35 \ldots + \frac{n(n+1)(n+2)}{1.2.3}.$$

Multiplicirt man jedes Glied der Reihe s_3 mit $\frac{4}{4}$ und summirt allmählich die einzelnen Glieder, so erhält man:

$$s_4 = \frac{1.2.3.4}{1.2.3.4} + \frac{2.3.4.5}{1.2.3.4} + \frac{3.4.5.6}{1.2.3.4} \cdots + \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{1.2.3.4}$$

$$= 1 + 5 + 15 + 35 \ldots + \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{1.2.3.4}.$$

Stellt man zur Uebersicht des Ganzen die gefundenen Reihen zusammen,

$s = 1 + 1 + 1 + 1 \ldots + 1 = n;$

$s_1 = 1+2+3+4 \ldots + n = \frac{n(n+1)}{1.2};$

$s_2 = 1+3+6+10 \ldots + \frac{n(n+1)}{1.2} = \frac{n(n+1)(n+2)}{1.2.3};$

$s_3 = 1+4+10+20 \ldots + \frac{n(n+1)(n+2)}{1.2.3} = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{1.2.3.4};$

$$s_4 = 1+5+15+35....+\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{1.2.3.4}$$
$$= \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}{1.2.3.4.5}; \text{ u. s. w.}$$

$$s_m = 1+\frac{m+1}{1}+\frac{(m+1)(m+2)}{1.2}+\frac{(m+1)(m+2)(m+3)}{1.2.3}\cdots$$
$$+\frac{n(n+1)(n+2).....(n+m-1)}{1.2.3....m} = \frac{n(n+1)(n+2)....(n+m)}{1.2.3....m(m+1)},$$

so sieht man, daß jedes Glied der zweiten Reihe die Summe der entsprechenden Glieder der ersten Reihe, jedes Glied der dritten Reihe die Summe der entsprechenden Glieder der zweiten u. s. w. angiebt. Diese verschiedenen Reihen nennt man **figurirte Zahlen** verschiedener Ordnung, so sind:

s_1 figurirte Zahlen der ersten Ordnung (Linienzahlen);
s_2 „ „ „ zweiten „ (dreieckige oder Trigonalzahlen) . ·· ··· ; ·, ··, ···, ····;
s_3 „ „ „ dritten „ (Pyramidalzahlen);
s_4 „ „ „ vierten „ u. s. w.

Durch die allmählige Summirung der Differenzreihe

$$S_1 = a+(a+d)+(a+2d)+(a+3d).....+(a+(n-1)d) = na+\frac{(n-1)nd}{1.2},$$

welche man **Differenzreihe des ersten Ranges (Grades)** nennt, erhält man eine neue Reihe, deren Glieder, als Differenzen betrachtet und mit einem neuen Anfangsgliede b verbunden, eine **Differenzreihe des zweiten Ranges** erzeugen.

Von der Reihe des zweiten Ranges ist das

1ste Glied $b=b$;
2te „ $b+a=b+a$;
3te „ $b+a+(a+d)=b+2a+d$;
4te „ $b+a+(a+d)+(a+2d)=b+3a+3d$;
5te „ $b+a+(a+d)+(a+2d)+(a+3d)=b+4a+6d$;
⋮
nte „ $b+(n-2)a+\frac{(n-3)(n-2)d}{1.2}+a+(n-2)d = b+(n-1)a + \frac{(n-2)(n-1)d}{1.2}$;

deren Summe $S_2 = nb+\frac{(n-1)n}{1.2}a+\frac{(n-2)(n-1)n}{1.2.3}d.$

Addirt man die einzelnen Glieder des zweiten Ranges nach und nach und nimmt ein neues Anfangsglied c an, so erhält man die **Differenzreihe des dritten Ranges**.

1stes Glied $c = c$;
2tes " $c + b = c + b$;
3tes " $c + b + b + a = c + 2b + a$;
4tes " $c + b + b + a + b + 2a + d = c + 3b + 3a + d$;
5tes " $c + 3b + 3a + d + b + 3a + 3d = c + 4b + 6a + 4d$;
6tes " $c + 4b + 6a + 4d + b + 4a + 6d = c + 5b + 10a + 10d$;
ntes " $c + (n-2)b + \frac{(n-3)(n-2)a}{1.2} + \frac{(n-4)(n-3)(n-2)d}{1.2.3}$

$$+ b + \frac{(n-2)a}{1} + \frac{(n-3)(n-2)d}{1.2} = c + (n-1)b$$

$$+ \frac{(n-2)(n-1)a}{1.2} + \frac{(n-3)(n-2)(n-1)d}{1.2.3};$$

deren Summe

$$S_3 = nc + \frac{(n-1)n}{1.2}b + \frac{(n-2)(n-1)n}{1.2.3}a + \frac{(n-3)(n-2)(n-1)n}{1.2.3.4}d.$$

Ist in der Differenzreihe des zweiten Ranges $b = 1$, $a = 2$ oder 3 oder 4 und $d = 1$ oder 2 oder 3 u. s. w., so gehört sie zu den figurirten Zahlen der zweiten Ordnung, und da die einzelnen Glieder durch Polygone sich versinnlichen lassen, so nennt man sie auch Polygonalzahlen. Z. B.

Ist $a = 2$ und $d = 1$, so erhält man 1, 3, 6, 10, 15 ..., $\frac{n(n+1)}{1.2}$ (dreieckige oder Trigonalzahlen).

" $a = 3$ und $d = 2$, " " " 1, 4, 9, 16 ...., n^2 (viereckige oder Tetragonalzahlen).

" $a = 4$ und $d = 3$, " " " 1, 5, 12, 22 ..., $\frac{n(3n-1)}{1.2}$ (fünfeckige oder Pentagonalzahlen) u. s. w.

Setzt man in der Differenzreihe des dritten Ranges $c = 1$, $b = 3, 4$, $a = 3$, $d = 1, 2, 3$ u. s. w., so erhält man figurirte Zahlen der dritten Ordnung oder Pyramidalzahlen.

Ist $b = 3$, $a = 3$ und $d = 1$, so erhält man 1, 4, 10, 20, 35 ..., $\frac{n(n+1)(n+2)}{1.2.3}$ (dreieckige Pyramidalzahlen).

" $b = 4$, $a = 5$ und $d = 2$, so erhält man 1, 5, 14, 30, 55 ...., $\frac{n(n+1)(2n+1)}{1.2.3}$ (viereckige Pyramidalzahlen) u. s. w.

§ 65. Eine Anwendung der Quotientenreihe findet in der Zinses-Zins-Rechnung statt.

(Aufg. Sammlg. § 44. III, 97—110.)

4. Zinsrechnung.

Im Allgemeinen kann jeder Gegenstand von Werth ein Kapital genannt werden; im engeren Sinne versteht man aber unter Kapital eine jede Geldsumme, die einem Anderen gegen gewisse Entschädigung eine Zeitlang zur Benutzung überlassen wird. Derjenige, der dem Anderen das Kapital auf einige Zeit abtritt, wird der Gläubiger desjenigen genannt, der es erhält, und dieser ist im Gegentheil jenes Schuldner. Die Entschädigung, die der Schuldner dem Gläubiger geben muß, nennt man die Zinsen oder Interessen, und da der Betrag derselben, außer von der Größe des Kapitals, auch von der Zeit abhängt, so ist es gebräuchlich, das Jahr als Zeiteinheit hierbei anzunehmen, und um die Rechnung zu vereinfachen, wird 100 als Kapitaleinheit zu Grunde gelegt. Hierdurch ist der Ausdruck Procent (für Hundert) entstanden; es bedeuten also 5 Procent so viel als für jedes 100 werden jährlich 5 Zinsen gegeben. Werden die Zinsen nur von dem Kapital erhoben, so nennt man sie einfache Zinsen, werden hingegen Zinsen von dem Kapital und den fälligen Zinsen erhoben, so nennt man sie Zinseszinsen. Die jährlichen Zinsen von dem Kapital eins mit dem Kapital zusammen heißen der Zinsfuß und werden gewöhnlich mit f bezeichnet, so wie das angelegte Kapital mit k, die Anzahl der Jahre mit n, die Procente mit p, die Zinsen allein mit z und das gesuchte Kapital sammt Zinsen nach n Jahren mit S. Sind z. B. 5 Procent, so ist der Zinsfuß $f = 1 + \frac{5}{100} = 1{,}05$, oder sind p Procent so ist $f = 1 + \frac{p}{100} = \frac{100 + p}{100}$.

a) Einfache Zinsen.

67. Aufg. Eine Gleichung zwischen k, n, p und z zu finden.

Aufl. Für ein Jahr ist $z = \frac{kp}{100}$, folglich für n Jahre $z = \frac{knp}{100}$. Hieraus findet man, wenn drei Größen gegeben sind, die vierte.

1. Zus. Ist $n = m + \frac{h}{q}$, so ist $z = \frac{kmp}{100} + \frac{kph}{100q} = \frac{kp}{100}\left(m + \frac{h}{p}\right)$.

2. Zus. Soll z gleich dem mfachen des auszuleihenden Kapitals sein, so ist $m = \frac{pn}{100}$, und folglich $n = \frac{100m}{p}$, wo m sowohl eine ganze Zahl als ein Bruch sein kann.

68. Aufg. Eine Gleichung zwischen S, k, n und p zu finden.

Aufl. $S = k + \frac{knp}{100} = \frac{k(100 + np)}{100}$.

§ 66. Erklärung. Disconto oder Rabatt heißt der Abzug für eine erst künftig fällige Capitalsumme, wenn dieselbe vor ihrer Verfallzeit bezahlt werden soll; man erhält also den Rabatt, wenn man den augenblicklichen Werth eines Kapitals subtrahirt von der Summe, welche das Kapital nach einer bestimmten Zeit mit den Zinsen zusammen ergiebt.

69. Aufg. A hat B nach 10 Jahren 18570 Rbl. zu zahlen, er will die Zahlung gleich machen; wie groß ist der Rabatt bei 5 % einfachen Zinsen?

Aufl. Man berechne k und subtrahire es von S, also $k = \frac{100S}{100 + pn} = 12380$ Rbl., folglich ist das Disconto oder der Rabatt 6190 Rbl.

(Aufg. Sammlg. § 45. 6—13).

b) Zinseszinsen.

70. Aufg. Eine Gleichung zwischen S, k, n und f zu finden.

Aufl. Das Kapital k sei zu p Procent angelegt, so erhält man am Ende des ersten Jahres an Kapital und Zinsen $k + \frac{kp}{100} = k\left(1 + \frac{p}{100}\right) = kf$. Für das zweite Jahr werden die Zinsen nicht mehr von dem Kapital k, sondern von kf berechnet, und man erhält am Ende des zweiten Jahres an Kapital und Zinsen $kf + \frac{kpf}{100} = kf\left(1 + \frac{p}{100}\right) = kf^2$. Nun ist das Kapital kf^2, also sind am Schlusse des dritten Jahres Kapital und Zinsen $kf^2 + \frac{kf^2p}{100} = kf^2\left(1 + \frac{p}{100}\right) = kf^3$, folglich ist nach n Jahren $S = kf^n$. Diese Gleichung gilt nur, wenn n eine ganze Zahl ist. Ist n eine gemischte Zahl $= m + \frac{h}{q}$, so ist der Anwuchs des Kapitals nach m Jahren $= kf^m$, und dieses als Kapital betrachtet, beträgt in der Zeit von $\frac{h}{q}$ Jahren zu p Procent $\frac{hpkf^m}{100q}$; mithin ist das Kapital sammt Zinsen nach $m + \frac{h}{q}$ Jahren $S = kf^m + \frac{ph}{100q}\,kf^m = kf^m\left(1 + \frac{ph}{100q}\right)$.

71. Aufg. Wie groß ist S nach n Jahren bei $p\,\%$, wenn die Zinsen nicht jährlich sondern in kürzeren Zeiträumen, etwa in $\frac{1}{m}$ Jahr zum Kapital geschlagen werden?

Aufl. Man setze in die Formel kf^n oder $k\left(1+\frac{p}{100}\right)^n$ statt $p = \frac{p}{m}$ und mn statt n ein, so ist $S = k\left(1+\frac{p}{100m}\right)^{mn}$.

72. Aufg. Das Disconto (D) für S, n und f zu berechnen.

Aufl. $S = kf^n$ und $k = \frac{S}{f^n}$, folglich $D = S - \frac{S}{f^n} = \frac{S(f^n - 1)}{f^n}$.

73. Aufg. Ein Kapital k ist zum Zinsfuß f angelegt, und wird am Ende eines jeden Jahres um eine Summe s vermehrt oder vermindert; wie groß ist das Ganze nach n Jahren?

Aufl. Nach dem ersten Jahre ist das Kapital k angewachsen zu kf, und nun werden s als erspart hinzugelegt oder als verbraucht hinweggenommen; folglich ist das Ganze nach dem ersten Jahre $kf \pm s$. Das Kapital $kf \pm s$ ist am Ende des zweiten Jahres angewachsen zu $(kf \pm s)f = kf^2 \pm sf$. Jetzt wird wieder s hinzugethan oder hinweggenommen, folglich ist das Ganze am Ende des dritten Jahres $= kf^2 \pm sf \pm s$. Dieses Kapital ist am Ende des dritten Jahres angewachsen zu $kf^3 \pm sf^2 \pm sf$; es wird jetzt wieder s hinzugelegt oder hinweggenommen, folglich ist das Ganze am Ende des dritten Jahres $= kf^3 \pm sf^2 \pm sf \pm s$ u. s. w. Also ist das Ganze am Ende des nten Jahres $S = kf^n \pm sf^{n-1} \pm sf^{n-2} \pm sf^{n-3} \ldots \pm sf \pm s = kf^n \pm (sf^{n-1} + sf^{n-2} \ldots + s)$. Der Ausdruck in der Klammer ist eine Quotientenreihe, deren erstes Glied $a = s$, das letzte Glied $t = sf^{n-1}$ und der Quotient $e = f$ ist, und da die Summe einer Quotientenreihe $= \frac{te - a}{e - 1}$ ist, so ist $S = kf^n \pm \frac{s(f^n - 1)}{f - 1}$.

74. Aufg. Ein Kapital k ist zum Zinsfuß f angelegt, und wird zum Anfange eines jeden Jahres (vom zweiten anfangend) um eine gewisse Summe s vermehrt; wie groß ist das Ganze nach n Jahren?

Aufl. Nach dem ersten Jahre ist das Kapital k angewachsen zu kf, zu Anfang des zweiten Jahres wird die Summe s hinzugelegt, folglich ist das Ganze am Ende des zweiten Jahres $= kf^2 + sf$. Am Anfange des dritten Jahres wird wieder s hinzugelegt, mithin ist das ganze Kapital am Ende des dritten Jahres $(kf^2 + sf)f + sf = kf^3 + sf^2 + sf$ u. s. w. Am Ende des nten Jahres ist $S = kf^n + (sf^{n-1} + sf^{n-2} + sf^{n-3} \ldots + sf)$. Die Summe der Reihe in der Klammer ist $\frac{sf^{n-1}f - sf}{f - 1} = \frac{sf(f^{n-1} - 1)}{f - 1}$; folglich $S = kf^n + \frac{sf(f^{n-1} - 1)}{f - 1}$.

§ 67. Erklärung. Man nennt auch s die Rente und den Gläubiger, der die Rente empfängt, Rentner, so wie den Schuldner, der die Rente zu bezahlen hat, Unternehmer.

Man hat zweierlei Arten von Renten, nehmlich: 1) Zeitrenten oder Jahresrenten, wenn die Rente nur eine bestimmte Anzahl von Jahren bis etwa zur Tilgung des Einsatzes bezogen wird; 2) Lebensrente oder Leibrente, wenn der Rentner die Rente bis zu seinem Lebensende bezieht, in welchem Falle die Zahlung der Rente von dem Todestage des Rentners aufhört.

(Aufg. Sammlg. § 45. 16—48.)

Fünfter Abschnitt.

Das Zahlensystem.

Anmerkung. In der Quotientenreihe sehen wir, daß die Glieder nach den Potenzen von e fortschreiten und die Coefficienten bei e unverändert bleiben; ändern sich aber die Coefficienten und sind kleiner als e, so finden wir solche Reihen in den verschiedenen Zahlensystemen.

§ 68. Die Anordnung der Zahlen in Reihen nach den Potenzen einer bestimmten Zahl x (Grundzahl, Basis), deren Coefficienten alle kleiner als x sind, heißt ein Zahlensystem.

§ 69. Will man nun auf diese Weise alle Zahlen symbolisch ausdrücken, so ist klar, daß zur Bezeichnung der Coefficienten dieser Reihen nur so viele einfache Zeichen nöthig sind, als x Einheiten enthält, weil die Anzahl aller ganzen Zahlen, welche $< x$ sind, gleich $x - 1$ ist, wozu dann noch ein einfaches Symbol für Null kommt. Die einfachen Zeichen für die Coefficienten einer solchen Reihe heißen Zahlzeichen oder Ziffern. Für die Grundzahl selbst hat man kein einfaches Zeichen nöthig, da man überein gekommen ist, die Zahl nicht durch eine Reihe auszudrücken, sondern nur die Coefficienten in der gehörigen Ordnung neben einander zu setzen. Z. B. Jede Zahl N enthält folgende Reihen: $N = \nu x^p + \mu x^{p-1} \ldots\ldots + \delta x^3 + \gamma x^2 + \beta x^1 + \alpha x^0$. Diese Zahl wird symbolisch dargestellt durch $N = \nu\mu\ldots\delta\gamma\beta\alpha$, wobei man sich aber immer dessen zu erinnern hat, daß, wenn

es auf die Bestimmung des wahren Werthes der Zahl N ankommt, $\alpha, \beta, \gamma \dots$ der Reihe nach mit x^0, x^1, $x^2 \dots$ multiplicirt werden müssen. Da nun die Grundzahl x, wenn 0, 1 die bekannten Zeichen der Null und Eins sind, immer $1 . x + 0$ ist, so ist klar, daß in jedem Zahlensystem die Grundzahl $= 10$ geschrieben werden muß, und daher für die Grundzahl kein einfaches Zeichen nöthig ist. Nach dieser Methode kann man also in einem Zahlensystem, dessen Grundzahl x ist, alle Zahlen mit x einfachen Zeichen schreiben. Das Wesentliche bei derselben ist, wie man leicht sieht, daß jedem einfachen Zahlzeichen ein verschiedener Werth nach seiner Stelle beigelegt wird. Daß die niedrigste Ordnung auf der rechten Seite beginnt, deutet auf einen orientalischen Ursprung dieser Methode hin. Sie soll von den Indern, nicht von den Arabern herstammen [19]).

75. Aufg. Eine beliebige Zahl N in eine Reihe nach den Potenzen der Zahl x, die kleiner als N ist, zu verwandeln.

Aufl. Man dividire x in N, der Quotient sei a und der Rest α, so ist $N = ax + \alpha$. Ist $a > x$, so dividire man abermals a durch x, der Quotient sei b und der Rest β, ist auch $b > x$, so sei nach der Division der Quotient c und der Rest γ; so fahre man fort bis der Quotient, da a, b, c .... immer kleiner werden, einmal Null wird, man erhält dann folgende Gleichungen:

$$\left.\begin{array}{l} N = ax + \alpha \\ a = bx + \beta \\ b = cx + \gamma \\ \vdots \\ m = nx + \mu \\ n = \nu. \end{array}\right\}$$

Hier sind $\alpha, \beta, \gamma \dots$ immer kleiner als x und können also auch Null sein.

---

[19]) Diese indische Rechnungsart hat ihren Weg in die Abendländer durch den gelehrten Astronomen Ahmet Albiruni, welcher sich in Indien aufhielt, gefunden; vielleicht auch durch maurische Zollbeamte an der nordafrikanischen Küste und den Verkehr derselben mit italienischen Kaufleuten. — Nach der gewöhnlichen Meinung brachten sie die Araber nach Spanien, wo wahrscheinlich schon im 10. Jahrhundert der wegen seiner Gelehrsamkeit berühmte Gerbert, aus Frankreich gebürtig, welcher unter dem Namen Sylvester II. im Jahre 999 die päpstliche Würde erhielt, sie von ihnen lernte. Ihre Verbreitung ging langsam von statten; selbst im 12. Jahrhundert war sie noch sehr wenig verbreitet. Erst um 1300 war sie allgemein im Gebrauch. — Bei den Alten war die Methode, Zahlen zu schreiben, sehr unbequem, weil die meisten Zahlen durch besondere Zeichen ausgedrückt wurden; so bedienten sich z. B. die Hebräer und Griechen der Buchstaben ihrer Alphabete mit und ohne Punkte als Zahlen.

Setzt man für a, b, c ... m, n die gefundenen Gleichungen in N hinein, so erhält man eine Gleichung, deren Glieder nach den Potenzen von x fortschreiten.

$N = ax+\alpha = bx^2+\beta x+\alpha = cx^3+\gamma x^2+\beta x+\alpha = \nu x^p+\mu x^{p-1}...+\gamma x^2+\beta x+\alpha.$

76. Aufg. Die verschiedenen Zahlensysteme aufzufinden.

Aufl. Da x jede Zahl außer 0 und 1 sein kann, so können auch unendlich viele Zahlensysteme vorkommen. Da aber fast alle Völker zu allen Zeiten bis Zehn zählen, wahrscheinlich der zehn Finger wegen, so hat man auch nur zehn Ziffern. x kann also von zwei bis zehn Einheiten enthalten, und daher entstehen neun Zahlensysteme, sie heißen:

1) das dyadische System hat zwei Zeichen: 0,1;
2) „ triadische „ „ drei „ 0,1,2;
3) „ tetradische „ „ vier „ 0,1,2,3;
4) „ pentadische „ „ fünf „ 0,1,2,3,4;
5) „ hexadische „ „ sechs „ 0,1,2,3,4,5;
6) „ heptadische „ „ sieben „ 0,1,2,3,4,5,6;
7) „ oktadische „ „ acht „ 0,1,2,3,4,5,6,7;
8) „ enneadische „ „ neun „ 0,1,2,3,4,5,6,7,8;
9) „ dekadische „ „ zehn „ 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9, nach welchem wir zählen.

77. Aufg. Dekadische Zahlen nach verschiedenen Systemen zu schreiben.

Aufl. Man verwandle die dekadische Zahl in eine Reihe, deren Glieder nach den Potenzen von 10 (10 hat nach den verschiedenen Systemen auch verschiedene Einheiten) fortschreiten. z. B. 1) die dekadische Zahl 3465 nach dem pentadischen System zu schreiben. Hier hat 10 fünf Einheiten, nun verfahre man nach Aufgabe 75,

5/3465	5/693	5/138	5/27	5/5	5/1	0, so erhält man
0	3	3	2	0	1	

$1 . 5^5 + 0 . 5^4 + 2 . 5^3 + 3 . 5^2 + 3 . 5 + 0$; also 102330.

2) Dieselbe dekadische Zahl nach dem heptadischen System zu schreiben. Hier hat 10 sieben Einheiten, folglich

7/3465	7/495	7/70	7/10	7/1	0 giebt
0	5	0	3	1	

$1 . 7^4 + 3 . 7^3 + 0 . 7^2 + 5 . 7 + 0$, also 13050.

78. Aufg. Eine Zahl, nach verschiedenen Systemen geschrieben, in eine dekadische Zahl zu verwandeln, oder die Menge der Einheiten anzugeben.

Aufl. Man verwandle die gegebene Zahl in eine Reihe nach dem dekadischen System und addire die Einheiten. Z. B. 1) 4322 nach dem

pentadischen System in eine Reihe verwandelt, giebt $4.10^3+3.10^2+2.10^1+2.10^0$. Hier enthält 10 fünf Einheiten, folglich $4.5^3+3.5^2+2.5+2 = 500+75+10+2 = 587$ nach dem dekadischen System, oder die pentadische Zahl 4322 hat fünfhundert sieben und achtzig Einheiten.

2) Die enneadische Zahl 5436 hat wie viel Einheiten? $5.9^3+4.9^2+3.9^1+6.9^0 = 3645+324+27+6 = 4002$; also hat die enneadische Zahl 5436 viertausend und zwei Einheiten.

79. Aufg. Zahlen nach verschiedenen Systemen zu addiren.

Aufl. Man addire jede Stelle und dividire die Summe durch die Basis, der Quotient gehört zur nächsten Stelle links und der Rest bleibt in der Stelle. Z. B. die oktadischen Zahlen $5102+4237+1563+4274+5006$ zu addiren. Die Summe der ersten Stellen giebt zwei und zwanzig Einheiten, durch acht Einheiten (Basis) dividirt, giebt 2 Einheiten zur folgenden Stelle links und 6 Einheiten zur ersten; die Summe der zweiten Stellen ist achtzehn Einheiten, wieder durch acht Einheiten dividirt, giebt 2 Einheiten zur dritten Stelle und 2 Einheiten bleiben in der zweiten Stelle u. s. w. Man erhält also zur Summe die oktadische Zahl 24426.

80. Aufg. Zahlen nach verschiedenen Systemen zu subtrahiren.

Aufl. Man verfahre wie mit dekadischen Zahlen; ist der Subtrahend einer Stelle größer als der Minuend, so borge man eine Einheit von der nächstvorhergehenden Stelle, die enthält aber in der nächstniedrigen so viel Einheiten als die Basis des Systems Einheiten enthält. Z. B. 1) die tetradischen Zahlen 310213 und 203122 von einander zu subtrahiren; die Differenz ist die tetradische Zahl 101031.

2) Die oktadischen Zahlen 5603741 u. 3275365 geben zur Differenz die oktadische Zahl 2306354.

81. Aufg. Zahlen nach verschiedenen Systemen zu multipliciren.

Aufl. Man verfahre nach Aufgabe 66.

z. B. 1) Nach dem hexadischen System zu multipliciren:

$$\begin{array}{r} 532 \\ 413 \\ \hline 2440 \\ 532 \\ 3412 \\ \hline 353400 \end{array}$$

2) Nach dem pentadischen System:

```
          1403
          2324
        ------
         12122
         3311
        10214
        3311
      --------
      4433132.
```

82. Aufg. Zahlen nach verschiedenen Systemen zu dividiren.

Aufl. Nach dem Vorhergehenden findet man die Auflösung leicht.

z. B. 1) Nach dem heptadischen System:

```
354 | 3365241 | = 6402
      3153
      ----
       2122
       2112
       ----
         1041
         1041
```

2) Nach dem triadischen System:

```
201 | 2112101 | = 10121
      201
      ---
       1021
        201
       ----
        1200
        1102
        ----
          211
          201
          ---
           10
```

(Aufg. Sammlg. § 46. 7—39.)

Von der Theilbarkeit einiger Zahlen.

§ 70. Die gemeine Arithmetik lehrt, daß eine Zahl durch 2 theilbar ist, wenn ihre letzte Ziffer eine Null oder eine gerade Zahl ist; daß eine Zahl durch 4, 8, 16.... theilbar ist, wenn sie am Ende 2, 3, 4.... Nullen hat oder wenn die Zahl, welche die 2, 3, 4.... letzten Ziffern bilden, durch 4, 8, 16.... theilbar ist; daß eine Zahl durch 5 theilbar ist, wenn ihre letzte Ziffer eine Null oder 5 ist; daß eine Zahl durch 3 oder 9 theilbar ist, wenn 3 oder 9 in der Summe der Ziffern (Quersumme) aufgeht;

daß endlich eine Zahl durch 11 theilbar ist, wenn die Differenz der Quersummen ihrer geraden und ihrer ungeraden Stellen durch 11 theilbar.

Der Beweis ergiebt sich aus dem Zahlensystem. Es sei $\delta.10^3+\gamma.10^2+\beta.10^1+\alpha\ 10^0$ die Zahl, welche durch m theilbar sein soll. Man zerlege jede Potenz von 10 in zwei Theile, von denen der erste ein Vielfaches von m und der Rest kleiner als m ist, also

$$10^0 = 1$$
$$10^1 = mq_1 \pm r_1$$
$$10^2 = mq_2 \pm r_2$$
$$10^3 = mq_3 \pm r_3 \text{ u. s. w.}$$

Die gegebene Zahl ist dann $=\delta(mq_3 \pm r_3)+\gamma(mq_2 \pm r_2)+\beta(mq_1 \pm r_1)+\alpha=(\delta mq_3+\gamma mq_2+\beta mq_1)+(\pm\delta r_3 \pm\gamma r_2 \pm\beta r_1+\alpha)$. Ist nun der zweite Summand durch m theilbar, so ist die ganze Zahl durch m theilbar.

Beispiele. 1) 7821 ist durch 9 theilbar, weil $7821=7(999+1)+8(99+1)+2(9+1)+1=7.999+8.99+2.9+(7+8+2+1)$; nun ist $7+8+2+1$ durch 9 theilbar, folglich auch die gegebene Zahl (29. Lehrs.).

2) 88737 ist durch 11 theilbar, weil $88737=8(9999+1)+(8.1001-1)+7(99+1)+3(11-1)+7=8.9999+8.1001+7.99+3.11+(8-8+7-3+7)$. Nun ist jeder Summand und auch die Zahl $(8+7+7-8-3)$ durch 11 theilbar, folglich ist die ganze Zahl durch 11 theilbar.

Von den Decimalbrüchen.

§ 71. Wenn man die Reihe in Aufg. 75 weiter fortsetzt, so erhält man x mit negativen Exponenten, und diese Glieder werden, wenn x zehn Einheiten enthält, Decimalbrüche genannt. Z. B. $3.x^2+9.x^1+2.x^0+3.x^{-1}+0.x^{-2}+5.x^{-3}=3.10^2+9.10+2.10^0+3.10.1+0.10^{-2}+5.10^{-3}=392{,}305$

Die Rechnungen mit Decimalbrüchen[20]) werden hier vorausgesetzt, nur die Sätze von der Verwandlung derselben in gemeine Brüche und umgekehrt sollen hier allgemein bewiesen werden.

83. Aufg. Gemeine Brüche in Decimalbrüche zu verwandeln.

Aufl. Es sei der ächte Bruch $\frac{a}{b}$ (und a und b relative Primzahlen), man soll ihn in einen Decimalbruch verwandeln d. h. zu einem Bruche machen, dessen Nenner eine Potenz von 10 ist; so dividire man ihn durch 10^n, dann muß man auch mit 10^n multipliciren, sonst wird der

[20]) Regiomontanus (eigentlich Johann Müller, geb. 1436, nannte sich Regiomontanus von seinem Geburtsort Königsberg in Franken, starb in Rom 1476) hat die Veranlassung zu dieser Rechnung gegeben.

Werth ein anderer; also $\frac{a}{b} = \frac{\frac{a}{b} \cdot 10^n}{10^n} = \frac{z}{10^n}$. Hier treten zwei Fälle ein, entweder ist z eine ganze Zahl oder nicht. Im ersten Falle ist b genau in 10^n enthalten und das kann nur stattfinden, wenn b ein Produkt aus den Faktoren 2, 5 und Potenzen dieser Primzahlen ist; einen solchen Decimalbruch nennt man einen endlichen. Im zweiten Falle ist b nicht genau in 10^n enthalten, b hat also andere Primfaktoren als 2 und 5; einen solchen Decimalbruch nennt man einen unendlichen.

83. Lehrs. Bei den unendlichen Decimalbrüchen kehren dieselben Ziffern in derselben Reihenfolge wieder. Man nennt eine solche Wiederkehr von Ziffern eine Periode und zwar fängt die Periode gleich mit der ersten Ziffer an, sobald b keinen Faktor 2 oder 5 enthält.

Bew. Da b nicht in 10 und nicht in a enthalten ist, so ist $\frac{a \cdot 10}{b} = q_1 + \frac{r_1}{b}$. Nun ist $\frac{a \cdot 10}{b}$ 10 mal größer als $\frac{a}{b}$, also muß man es 10 mal kleiner machen, folglich $\frac{a \cdot 10}{b} \cdot 10^{-1} = q_1 \cdot 10^{-1} + \frac{r_1}{b} \cdot 10^{-1}$; hier ist $r_1 < b$. Verfährt man mit $\frac{r_1}{b}$ ebenso wie mit $\frac{a}{b}$, so ist $\frac{r_1 \cdot 10 \cdot 10^{-1}}{b} = q_2 \cdot 10^{-1} + \frac{r_2}{b} \cdot 10^{-1}$, also $\frac{a \cdot 10^2}{b} \cdot 10^{-2} = q_1 \cdot 10 \cdot 10^{-2}$ $+ q_2 \cdot 10^{-2} + \frac{r_2}{b} \cdot 10^{-2} = q_1 \cdot 10^{-1} + q_2 \cdot 10^{-2} + \frac{r_2}{b} \cdot 10^{-2}$. Fährt man so fort, so erhält man:

$$\frac{a . 10^n}{b} \cdot 10^{-n} = q_1 \cdot 10^{-1} + q_2 . 10^{-2} + q_3 . 10^{-3} \ldots\ldots + q_n 10^{-n} + \frac{r_n}{b} \cdot 10^{-n}.$$

Die Reste können nur die Zahlenwerthe von 1 bis (b—1) enthalten, weil sie alle kleiner als b sind. Ferner sind die Reste alle unter einander verschieden; r_2 darf nicht gleich r_1 sein.
Denn ist $r_1 = r_2$, so ist $(a - r_1)10 = (q_1 - q_2)b$, da

$$\frac{a}{b} \cdot 10 = q_1 + \frac{r_1}{b}, \text{ also } a \cdot 10 = q_1 b + r_1$$

$$\text{und } \frac{r_1}{b} \cdot 10 = q_2 + \frac{r_2}{b}, \text{ also } r_1 \cdot 10 = q_2 b + r_2 \text{ ist.}$$

Nun ist $(q_1 - q_2)b$ durch b theilbar, folglich müßte auch $(a - r_1)10$ durch b theilbar sein; es ist aber $a - r_1 < b$, also ist $(a - r_1)10$ nicht durch b theilbar. Wir erhalten demnach bei der Annahme, daß $r_1 = r_2$ ist, etwas Falsches, folglich kann r_1 nicht gleich r_2 sein; ebenso ist r_2 nicht gleich r_3 u. s. w. Ein Rest muß wieder = a sein, weil die Reste ja alle Zahlen von 1 bis (b—1) enthalten können und a ebenfalls alle Zahlen

von 1 bis $(b-1)$ enthalten kann; ist einmal ein Rest $= a$, so kehren dieselben Reste in derselben Reihenfolge wieder. Ist z. B. $r_1 = a$, so enthält die Periode nur eine Ziffer, wie $2/3 = 0{,}666\ldots$, ist $r_2 = a$, so enthält die Periode 2 Ziffern, wie $2/11 = 0{,}1818\ldots$; ist erst $r_6 = a$, so besteht die Periode aus 6 Ziffern, wie $2/7 = 0{,}285714285714\ldots$ u. s. w.

84. Lehrs. Enthält b neben anderen Primfaktoren 2 und 5, so stehen so viel Ziffern vor der Periode als der höchste Exponent von 2 oder 5 Einheiten enthält.

Bew. Es sei $\frac{a}{b} = \frac{a}{2^m p} = \frac{a \cdot 5^m}{10^m p} = \frac{1}{10^m} \cdot \frac{5^m a}{p}$. Nun hat $\frac{5^m a}{p}$ immer die Form $P + \frac{R}{p}$; ist $5^m a > p$, so ist P eine ganze Zahl, ist aber $5^m a < p$ so ist $P = 0$. Es ist also $\frac{a}{b} = \frac{1}{10^m}\left(P + \frac{R}{p}\right)$ und P muß immer so viel Ziffern enthalten als m Einheiten, und $\frac{R}{p}$ bildet erst die Periode; die Periode kann höchstens $(p-1)$ Ziffern enthalten. Enthält b auch eine Potenz von 5 als Faktor, z. B. $\frac{a}{b} = \frac{a}{2^m \cdot 5^n \cdot p}$ und m ist größer als n, ist $= n + \alpha$, so multiplicire man Zähler und Nenner mit 5^α, also $\frac{a}{b} = \frac{5^\alpha \cdot a}{2^m \cdot 5^n \cdot 5^\alpha \cdot p} = \frac{5^\alpha \cdot a}{10^m p}$ und verfahre nun wie oben.

84. Aufg. Decimalbrüche in gemeine Brüche zu verwandeln.

Aufl. Es sei $0,abcd\ldots abcd\ldots$ ein unendlicher Decimalbruch, dessen Periode sogleich anfängt und aus n Ziffern besteht. x sei der gemeine Bruch, so ist $0,abcd\ldots abcd\ldots = x$; man multiplicire mit 10^n, giebt $abcd\ldots, abcd\ldots = 10^n x$; man subtrahire nun die erste Gleichung von der zweiten, so erhält man $abcd\ldots = (10^n - 1)x$, folglich $x = \frac{abcd\ldots}{10^n - 1}$.

Stehen noch m Ziffern vor der Periode, als $0,\alpha\beta\gamma\ldots abcd\ldots abcd\ldots = x$, so multiplicire man mit 10^m, giebt $\alpha\beta\gamma\ldots, abcd\ldots abcd\ldots = 10^m . x$; multiplicire wieder mit 10^n, so ist $\alpha\beta\gamma\ldots abcd\ldots, abcd\ldots = 10^m . 10^n . x$; subtrahire die zweite Gleichung von der dritten, so erhält man $\alpha\beta\gamma\ldots abcd\ldots - \alpha\beta\gamma\ldots = 10^m(10^n - 1)x$, folglich $x = \frac{\alpha\beta\gamma\ldots abcd\ldots - \alpha\beta\gamma\ldots}{10^m(10^n - 1)}$.

Die Verwandlung der endlichen Decimalbrüche in gemeine Brüche hat keine Schwierigkeit.

(Aufg. Sammlg. § 47. 4 — 15.)

Sechster Abschnitt.

Von den Funktionen.

§ 72. Jede in einem mathematischen Ausdrucke vorkommende allgemeine Größe, welche während einer Rechnung ihren Werth nicht ändert, sondern denselben Werth unverändert beibehält, wird eine beständige Größe genannt, und man bedient sich zu ihrer Bezeichnung der ersten Buchstaben des Alphabets. Jede Größe aber, die beliebig verschiedene Werthe in einer und derselben Rechnung annehmen kann, ist eine veränderliche Größe und wird durch die Buchstaben x, y, z u. s. w. bezeichnet.

Jeder Ausdruck, in welchem beständige und veränderliche Größen auf irgend eine Art mathematisch mit einander verbunden vorkommen, wird eine Funktion[21]) genannt, und es wird die Funktion gewöhnlich nach der veränderlichen Größe benannt, welche in ihr enthalten ist. So z. B. sind die Ausdrucke $a + bx$, $\frac{a + x}{b + x^2}$, $a \log x$ u. s. w. Funktionen von x. Der Ausdruck $a(b + cx)^n - dz^m$ ist eine Funktion von x und z.

§ 73. Da solche Ausdrücke selbst veränderlich sind, so kann man sie durch einen der Buchstaben, deren man sich zur Bezeichnung der veränderlichen Größen bedient, bezeichnen; hierdurch wird eine Gleichung mit zwei von einander abhängenden veränderlichen Größen erhalten, z. B. $y = a + bx$, wo y abhängig ist von x. So ist das Produkt eine Funktion vom Multiplicator oder Multiplicand, die Potenz vom Grundfaktor oder Exponent u. s. w.

§ 74. Ist überhaupt von einer Funktion einer veränderlichen Größe die Rede, ohne daß die Art und Weise, wie dieselbe aus beständigen und veränderlichen Größen zusammengesetzt ist, näher angegeben wird, so bedient man sich zur Bezeichnung derselben der den eingeklammerten veränderlichen Größen vorgesetzten Buchstaben f, φ, F...[22]). So bedeutet $f(x)$ oder $\varphi(x)$ irgend eine Funktion der veränderlichen Größe x, und $f(x, z)$ bedeutet eine Funktion, welche die veränderlichen Größen x und z enthält.

---

[21]) Der Ausdruck „Funktion" ist zuerst von Joh. Bernoulli (geb. zu Basel 1667, gest. 1748 daselbst) gebraucht.

[22]) Diese Bezeichnung scheint Clairaut's (geb. 1713, gest. 1765) zuerst gebraucht zu haben.



Eintheilung der Funktionen.

§ 75. Die Funktionen werden von einander unterschieden nach den verschiedenen Beziehungen, in welchen die veränderliche Größe in denselben vorkommt. Kommt die veränderliche Größe in Verbindung der 6 ersten Rechnungsarten vor, so wird die Funktion algebraisch genannt, in allen übrigen Verbindungen transscendent. So sind z. B. $y = a + bx^2$ oder $y = ax^{\frac{n}{m}}$ algebraische Funktionen, hingegen $y = \log x$ oder $y = a \sin x$ transscendente Funktionen.

Die algebraischen Funktionen sind theils rationale, theils irrationale. In jenen kommen nur Potenzen der veränderlichen Größen mit ganzen Exponenten vor, z. B. $ax^2 + bx$ oder $\frac{x\sqrt{a + dx^2}}{\alpha + \beta x^2}$, in diesen Potenzen der veränderlichen Größen mit gebrochenen Exponenten, z. B. $x^{3/2} + ax^{1/2}$ oder $\sqrt{a^2 + x^2} + ax^{1/2}$.

Die rationalen Funktionen werden endlich in ganze und gebrochene eingetheilt. Jene sind solche, in welchen die veränderliche Größe nirgends einen negativen Exponenten hat, noch sonst ein Bruch vorkommt, dessen Nenner x enthält.

Die allgemeine Form aller ganzen rationalen Funktionen ist $y = a + bx + cx^2 + dx^3 \ldots$ und die der rationalen gebrochenen Funktionen $y = \frac{a + bx + cx^2 \ldots}{\alpha + \beta x + \gamma x^2 \ldots}$.

Eigenschaften der Funktionen.

85. Lehrs. Ist y eine Funktion von x, so ist auch umgekehrt x eine Funktion von y.

Bew. Es sei $y = f(x)$, so muß jedem Werthe von $x = \alpha$ ein Werth von $y = \beta$ entsprechen. Bringt man nun x allein auf die eine Seite der Gleichung, so kann, wenn man $y = \beta$ setzt, x keinen andern Werth als α enthalten; folglich ist $x = f(y)$.

§ 76. Wenn $y = f(x)$ und auch $y = \varphi(x)$, so ist man hieraus nur in dem Falle berechtigt zu folgern, es müsse nun auch sein $f(x) = \varphi(x)$, wenn $f(x)$ und $\varphi(x)$ dieselbe Funktion, nur in verschiedener Form ausgedrückt, enthalten.

85. Aufg. Die unbekannten Coefficienten von $\varphi(x)$ aufzufinden, wenn die Coefficienten von $f(x)$ bekannt sind und $f(x) = \varphi(x)$ ist.

Aufl. Es sei $f(x) = a + bx + cx^2 + dx^3 \ldots$
und $\varphi(x) = \alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 \ldots$
und $f(x) = \varphi(x)$, folglich $0 = (a-\alpha) + (b-\beta)x + (c-\gamma)x^2 + (d-\delta)x^3 \ldots$
Da x jeden beliebigen Werth haben kann, so setze man $x = 0$, so wird $a - \alpha = 0$. Weil aber a und α beständige Größen sind, so muß $a - \alpha = 0$ bleiben auch für jeden andern Werth von x; folglich wird die obige Gleichung $0 = (b-\beta)x + (c-\gamma)x^2 + (d-\delta)x^3 \ldots$, oder, weil man alle Glieder durch x dividiren kann, $0 = (b-\beta) + (c-\gamma)x + (d-\delta)x^2 \ldots$ Diese Gleichung gilt für jeden Werth von x, folglich auch für $x = 0$. Es ist also $b - \beta = 0$ und weil b und β beständige Größen sind, so bleibt $b - \beta = 0$ auch für jeden andern Werth von x. Wird auf diese Art fortgeschlossen, so ergiebt sich auch $c - \gamma = 0$ und $d - \delta = 0$; also $a = \alpha$, $b = \beta$ u. s. w.

Beispiel 1) $y = \frac{1}{1+x}$. Man soll die ganze rationale Funktion bestimmen, die dieser gebrochenen gleichgesetzt werden darf. Es sei dieselbe $y = a + bx + cx^2 + dx^3 \ldots$, so kommt es darauf an, die Werthe der Coefficienten zu bestimmen. Es ist also $\frac{1}{1+x} = a + bx + cx^2 + dx^3 \ldots$
Hieraus folgt:
$$1 = a + \left.\begin{array}{r} b \\ +a \end{array}\right| x + \left.\begin{array}{r} c \\ +b \end{array}\right| x^2 + \left.\begin{array}{r} d \\ +c \end{array}\right| x^3 \ldots$$
und $0 = (a-1) + (b+a)x + (c+b)x^2 + (d+c)x^3 \ldots$, folglich muß sein:
$$\begin{array}{c} a-1=0 \\ \hline a=1 \end{array}, \quad \begin{array}{c} b+a=0 \\ \hline b=-a \\ \hline b=-1 \end{array}, \quad \begin{array}{c} c+b=0 \\ \hline c=-b \\ \hline c=+1 \end{array}, \quad \begin{array}{c} d+c=0 \\ \hline d=-c \\ \hline d=-1 \end{array} \ldots\ldots$$
Es ist also $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 \ldots$, wie auch durch Division wirklich gefunden wird.

2) $y = \frac{1}{a-x} = \frac{1}{a} + \frac{1}{a^2}x + \frac{1}{a^3}x^2 + \frac{1}{a^4}x^3 \ldots$

Von den ganzen rationalen Funktionen.

§ 77. Jede Veränderung der Form einer Funktion, durch welche das Wesen derselben nicht geändert wird, nennt man eine Umformung derselben, und diese besteht bei den ganzen rationalen Funktionen in nichts Anderem, als in einem Zerfällen der gegebenen Funktion in Faktoren.

86. Lehrs. Jede ganze rationale Funktion läßt sich in Faktoren zerlegen.

Bew. Es sei $y = a + bx + cx^2 \ldots\ldots$ Da nun y eine Funktion von x ist, so muß auch umgekehrt x eine Funktion von y sein (Lehrs. 85), und jedem Werthe der veränderlichen Größe auch wenigstens ein Werth der Funktion entsprechen, daher kann man $y = 0$ setzen. Man suche dann die Wurzeln dieser Gleichung auf; sind diese $\alpha, \beta, \gamma \ldots$, so müssen auch $x - \alpha$, $x - \beta$, $x - \gamma \ldots$ Faktoren der Funktion sein; folglich $a + bx + cx^2 \ldots = (x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma) \ldots$

Beispiele. 1) $y = x^2 - 3x - 10$. Hier muß, weil die Gleichung $x^2 - 3x - 10 = 0$ die Wurzel -2 enthält, $x+2$ ein Faktor der Funktion sein, und durch Division, also $\frac{x^2-3x-10}{x+2}$ erhält man den zweiten Faktor $= x - 5$; daher ist $x^2 - 3x - 10 = (x + 2)(x - 5)$.

2) $y = x^3 - 6x^2 - 19x + 24$. Setzt man für $x = 1$, so ist die Gleichung Null, folglich ist der eine Faktor $= x - 1$; dividirt man $\frac{y}{x-1}$, so erhält man die quadratische Gleichung $x^2 - 5x - 24$. Diese Gleichung enthält die Wurzeln 8 und -3; folglich ist $x^3 - 6x^2 - 19x + 24 = (x - 1)(x - 8)(x + 3)$.

Von den gebrochenen rationalen Funktionen.

86. Aufg. Man soll die ganze rationale Funktion für die gebrochene $\frac{A}{a+bx}$ bestimmen.

Aufl. Es sei $\frac{A}{a+bx} = \alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 \ldots$ Hier müssen $\alpha, \beta, \gamma, \delta \ldots$ bestimmt werden.

$$A = a\alpha + \begin{array}{c|} a\beta \\ +\alpha b \end{array}\, x + \begin{array}{c|} a\gamma \\ +b\beta \end{array}\, x^2 + \begin{array}{c|} a\delta \\ +b\gamma \end{array}\, x^3 \ldots$$

$0 = (a\alpha - A) + (a\beta + \alpha b)x + (a\gamma + b\beta)x^2 + (a\delta + b\gamma)x^3 \ldots$, giebt

$$\frac{a\alpha - A = 0}{\alpha = \frac{A}{a}}, \quad \frac{a\beta + \alpha b = 0}{\beta = -\frac{bA}{a^2}}, \quad \frac{a\gamma + b\beta = 0}{\gamma = \frac{b^2A}{a^3}}$$ u. s. w.; folglich ist

$$\frac{A}{a+bx} = \frac{A}{a} - \frac{bA}{a^2}x + \frac{b^2A}{a^3}x^2 - \frac{b^3A}{a^4}x^3 \ldots = A\left(\frac{1}{a} - \frac{b}{a^2}x + \frac{b^2}{a^3}x^2 \ldots\right).$$

Beispiele. 1) $\frac{a}{1-bx}$. 2) $\frac{5}{1-9x}$. 3) $\frac{2}{1+3x}$. 4) $\frac{\alpha+\beta x}{1-ax-bx^2}$.

5) $\frac{3+5x}{1-3x+8x^2}$. 6) $\frac{8+7x}{1-{}^5/_4x+{}^5/_4x^2}$. 7) $\frac{4-3x}{1+2x+5x^2}$.

8) $\frac{a+bx+cx^2\ldots\ldots}{\alpha+\beta x+\gamma x^2}$. 9) $\frac{1+2x+3x^2}{2+3x+4x^2}$.

87. Aufg. $y = \frac{a+bx}{(c-x)(c+x)}$ soll in zwei andere gebrochene Funktionen zerlegt werden, von welchen die eine $c - x$ und die andere $c + x$ zum Nenner hat.

Aufl. Es sei also $\frac{a+bx}{c^2-x^2} = \frac{\alpha}{c-x} + \frac{\beta}{c+x}$. Hier sind die Werthe von α und β zu bestimmen.

$a + bx = \alpha(c + x) + \beta(c - x)$,

$0 = (\alpha c + \beta c - a) + (\alpha - \beta - b)x$ und $\alpha c + \beta c - a = 0$, wie auch $\alpha - \beta - b = 0$, giebt $\alpha + \beta = \frac{a}{c}$

$$\alpha - \beta = b$$

$$\alpha = \frac{a + bc}{2c} \text{ und } \beta = \frac{a - bc}{2c}; \text{ folglich}$$

$$\frac{a+bx}{c^2-x^2} = \frac{a+bc}{2c(c-x)} + \frac{a-bc}{2c(c+x)}.$$

Beispiele. 1) $\frac{24+10x}{9-x^2}$. 2) $\frac{3-5x}{16-x^2}$.

88. Aufg. $y = \frac{a+bx}{x^2+cx+d}$ soll in zwei andere gebrochene Funktionen zerlegt werden, von welchen die eine $x + p$ und die andere $x + q$ zum Nenner hat, wenn $(x+p)(x+q) = x^2 + cx + d$ ist.

Aufl. Es sei also $\frac{a+bx}{(x+p)(x+q)} = \frac{\alpha}{x+p} + \frac{\beta}{x+q}$, so ist

$a + bx = \alpha(x+q) + \beta(x+p)$ und $0 = (\alpha q + \beta p - a) + (\alpha + \beta - b)x$,

also $\alpha = \frac{a - bp}{q - p}$ und $\beta = \frac{bq - a}{q - p}$; folglich

$$\frac{a+bx}{x^2+cx+d} = \frac{a-bp}{(q-p)(x+p)} + \frac{bq-a}{(q-p)(x+q)}.$$

Beispiele. 1) $\frac{15+2x}{x^2+12x+35}$. Hier ist $x^2+12x+35=(x+5)(x+7)$ und $\frac{a-bp}{q-p}=\frac{15-2.5}{7-5}=\frac{5}{2}$ und $\frac{bq-a}{q-p}=\frac{2.7-15}{7-5}=-\frac{1}{2}$; folglich $\frac{15+2x}{x^2+12x+35}=\frac{5}{2(x+5)}-\frac{1}{2(x+7)}$.

2) $\frac{27+4x}{x^2+11x+24}$.

89. Aufg. $\frac{a+bx}{(c+x)^2}$ soll in zwei andere gebrochene Funktionen zerlegt werden, von welchen die eine $(c+x)^2$ und die andere $c+x$ zum Nenner hat.

Aufl. Es sei also $\frac{a+bx}{(c+x)^2}=\frac{\alpha}{(c+x)^2}+\frac{\beta}{c+x}$, so ist $a+bx = \alpha+\beta(c+x)$ und $0=(\alpha+\beta c-a)+(\beta-b)x$, also $\beta=b$ und $\alpha=a-bc$; folglich $\frac{a+bx}{(c+x)^2}=\frac{a-bc}{(c+x)^2}+\frac{b}{c+x}$.

Beispiele. 1) $\frac{17+3x}{(5+x)^2}$. Hier ist $a=17$, $b=3$ und $c=5$, also $\frac{17+3x}{(5+x)^2}=\frac{2}{(5+x)^2}+\frac{3}{5+x}$.

2) $\frac{11+2x}{(4+x)^2}$. 3) $\frac{9-6x+129x^2}{(1-3x)^2(1+5x)}$. 4) $\frac{7+28x-96x^2}{(1-4x)^3}$.

5) $\frac{3+29x}{(x^2+4x-21)(x-1)}$. 6) $\frac{8+9x-5x^2}{(1-3x)^2(1+5x)}$.

Das Wegschaffen der Irrationalität aus Binomialformen.

90. Aufg. Man soll in der irrationalen Binomialform

$y=(a+bx)^{\frac{m}{n}}$ x so bestimmen, daß y rational wird.

Aufl. Setzt man $(a+bx)^{\frac{1}{n}}=z$, so wird $y=z^m$ und $x=\frac{z^n-a}{b}$.

Z. B. 1) $y=(5+2x)^{3/2}$; so ist $(5+2x)^{1/2}=z$, und $x=\frac{z^2-5}{2}$, und $y=z^3$. Man mag nun für z beliebige Werthe setzen, so erhalten y und x immer zu gleicher Zeit rationale Werthe.

Nimmt man für $z=3$, so ist $x=2$ und $y=27$.

2) $y = \left(\frac{8+5x}{6x-5}\right)^{2/3}$. Sei $\left(\frac{8+5x}{6x-5}\right)^{1/3} = z$, so ist $y = z^2$ und $x = \frac{8+5z^3}{6z^3-5}$. Nimmt man für $z = 2$, so ist $x = \frac{48}{43}$ und $y = \left(\frac{8+5.\frac{48}{43}}{6.\frac{48}{43}-5}\right)^{2/3} = \left(\frac{584}{73}\right)^{2/3} = 8^{2/3} = 4$.

3) $y = (4+5x)^{3/2}$. 4) $y = (3-\sqrt{2x})^{3/2}$. 5) $y = (6+4x)^{4/3}$.

6) $y = \left(\frac{2+3x}{4-x}\right)^{3/2}$. 7) $\left(\frac{5x-6}{10-3x}\right)^{2/3}$.

Auflösungen. 86. Aufg. 1) $a+abx+ab^2x^2+ab^3x^3\ldots\ldots$

2) $5+45x+405x^2+3645x^3\ldots\ldots$

3) $2-6x+18x^2-54x^3+162x^4\ldots\ldots$

4) $\alpha+(ax+\beta)x+[(a\alpha+\beta)a+\alpha b]x^2\ldots\ldots$

5) $3+14x+18x^2-58x^3-318x^4\ldots\ldots$

6) $8+17x+\frac{45}{4}x^2-\frac{115}{16}x^3-\frac{1475}{64}x^4\ldots\ldots$

7) $4-11x+2x^2+51x^3-112x^4\ldots\ldots$

8) $\frac{a}{\alpha}+\frac{b\alpha-a\beta}{\alpha^2}x+\frac{(c\alpha-a\gamma)\alpha-(b\alpha-a\beta)\beta}{\alpha^3}x^2\ldots\ldots$

9) $1/2+1/4x+1/8x^2-11/16x^3\ldots\ldots$

87. Aufg. 1) $\frac{9}{3-x}-\frac{1}{3+x}$. 2) $\frac{23}{8(4+x)}-\frac{17}{8(4-x)}$.

88. Aufg. 2) $\frac{3}{x+3}+\frac{1}{x+8}$.

89. Aufg. 2) $\frac{3}{(4+x)^2}+\frac{2}{4+x}$. 3) $\frac{8}{(1-3x)^2}-\frac{5}{1-3x}+\frac{6}{1+5x}$.

4) $\frac{8}{(1-4x)^3}+\frac{5}{(1-4x)^2}-\frac{6}{1-4x}$.

5) $\frac{4\frac{1}{2}}{x-3}-\frac{2\frac{1}{2}}{x+7}-\frac{2}{x-1}$.

6) $\frac{47}{12(1-3x)^2}+\frac{167}{96(1-3x)}+\frac{75}{32(1+5x)}$.

90. Aufg. 3) Für $x = -4/5$ wird $y=0$, für $x = -3/5$ wird $y=1$ und für $x=0$ wird $y=8$.

4) Für $x=2$ wird $y=1$, für $x=\frac{1}{2}$ wird $y=8$, für $x=18$ wird $y=27$.

5) Für $x=-\frac{5}{4}$ wird $y=1$, für $x=\frac{1}{2}$ wird $y=16$.

6) Für $x=\frac{1}{2}$ wird $y=1$, für $x=2$ wird $y=8$, für $x=\frac{17}{6}$ wird $y=27$.

7) Für $x=\frac{58}{43}$ wird $y=\frac{1}{4}$, für $x=2$ wird $y=1$, für $x=\frac{86}{29}$ wird $y=4$.

Siebenter Abschnitt.

Combinationslehre [23]).

§ 78. Bisher haben wir die verschiedenen Verbindungen der Größen behandelt; hier handelt es sich nur um die Zusammenstellung (Aneinanderreihung) der Größen. Bei der Verbindung mußte auf das Gleichartige gesehen werden, beim Zusammenstellen wird darauf keine Rücksicht genommen. Die Anleitung, gegebene Dinge nach gewissen Gesetzen zusammenzustellen, wird die Combinationslehre genannt.

§ 79. Die Dinge selbst, gleich- oder ungleichartig, welche mit einander zusammengestellt werden sollen, heißen Elemente, und jeder Ausdruck, welcher zusammengestellte Elemente enthält, ist eine Complexion [24]). Es ist gewöhnlich, die Elemente durch Buchstaben oder Ziffern zu bezeichnen. So bedeutet die Complexion a b c keineswegs ein Produkt, sondern bloß, daß die vorkommenden Elemente in der angegebenen Ordnung auf einander folgen sollen. Die Complexionen mit einerlei Anfangselement werden zu einer Ordnung gerechnet. Die mit a oder 1 anfangenden Complexionen bilden die erste, die mit b oder 2 anfangenden die zweite Ordnung u. s. w.

§ 80. Ist eine bestimmte Anzahl von Dingen gegeben, so kann erstens untersucht werden, wie oft diese Dinge in einer andern Folge aufge-

---

[23]) Die ersten Anfänge der Combinationslehre reichen wohl nicht über die Mitte des 16. Jahrhunderts hinaus. — Die Gesetze der Combinationslehre hat zuerst Hindenburg (geb. zu Dresden 1739, gest. zu Leipzig 1808) geliefert.

[24]) Gottfried Wilhelm Leibnitz (geb. zu Leipzig 1646, gest. 1716) führte diese Benennung ein.

stellt werden können, und dieses Verfahren nennt man permutiren; zweitens man untersucht, wie viele von einander verschiedene Zusammenstellungen zu je zwei, je drei u. s. w. Elementen man aus ihnen bilden kann, dieses Verfahren heißt combiniren; drittens man faßt beide Verfahren zusammen und dies nennt man variiren. Man kann auch die Permutation als Veränderung in Bezug auf die Ordnung der Elemente, die Combination als Veränderung in Bezug auf die Elemente selbst und die Variation als Veränderung in Beziehung auf beides zugleich betrachten.

1. Permutiren.

§ 81. Um anzuzeigen, daß man n Elemente permutiren soll, schreibt man die Anzahl der Elemente in eine Klammer und setzt P vor, z. B. P (1, 2, 3....) oder P (a, b, c....). Die Bildung sämmtlicher Permutationsformen ist lexicographisch, z. B.

P (a, b, c, d) =	abcd	bacd	cabd	dabc oder P(1,2,3) =	123
	abdc	badc	cadb	dacb	132
	acbd	bcad	cbad	dbac	213
	acdb	bcda	cbda	dbca	231
	adbc	bdac	cdab	dcab	312
	adcb	bdca	cdba	dcba	321.

§ 82. Es können unter den gegebenen Elementen mehrere gleich sein, dann schreibt man der Kürze wegen statt aller gleichen Elemente nur eins derselben mit dem Exponenten, der ihre Anzahl ausdrückt, also statt aaabbc schreibt man a^3b^2c. Diese Exponenten sind nur Wiederholungsexponenten und man sagt Permutation mit Wiederholung.

91. Aufg. Die Anzahl der Permutationen gegebener Elemente zu finden, wenn alle Elemente verschieden sind.

Aufl. Die Anzahl der Permutationen der Elemente abcd.... bezeichnet man mit nP(abcd....) (numerus permutationum).

Bei einem Elemente a ist nur eine Stellung möglich; also nP(a)=1. Kommt ein zweites Element b hinzu, so lassen sich zwei Stellungen denken, indem das zweite dem ersten vor- und nachgestellt werden kann, ab, ba; also n P (a, b) = 1 . 2. Kommt ein drittes Element hinzu, so kann dieses in jeder der zwei verschiedenen Zusammenstellungen die erste, zweite und dritte Stelle einnehmen; also n P (a, b, c) = 1 . 2 . 3, nämlich cab, acb, abc, cba, bca, bac. Tritt ein viertes Element hinzu, so kann es in jeder der vorigen 6 Permutationen 4 verschiedene Stellen einnehmen; also n P (a b c d) = 6 . 4 = 1 . 2 . 3 . 4. Soll also zu einer Permutation von (m—1) Elementen ein neues hinzugefügt werden, so kann dieses m verschiedene Stellen einnehmen. Denn es haben (m—1) Elemente

(m—2) Zwischenräume, deren jeder durch das neue Element ausgefüllt werden kann, und es kann dasselbe außerdem auch allen übrigen vor- und nachgesetzt werden; also $nP(abc\ldots m) = 1.2.3.4\ldots(m-1)\,m$. Eine Tischgesellschaft von 10 Personen kann demnach ihre Plätze $1.2.3.4\ldots.9.10 = 3628800$ mal wechseln.

92. Aufg. Die Anzahl der Permutationen gegebener Elemente zu finden, wenn wiederholte Elemente vorkommen.

Aufl. Sind zwei gleiche Elemente aa, so ist nur eine Stellung möglich; also $nP(a^2) = \frac{1.2}{1.2} = 1$. Kommt ein drittes ungleiches Element hinzu, so kann es vor-, zwischen- und nachgesetzt werden; also $nP(a^2b) = \frac{1.2.3}{1.2}$. Sind drei gleiche Elemente aaa, so ist auch nur eine Stellung möglich; also $nP(a^3) = \frac{1.2.3}{1.2.3}$. Kommt ein viertes ungleiches Element hinzu, so kann es vor-, in die Zwischenräume und nachgesetzt werden, als baaa, abaa, aaba, aaab; also $nP(a^3b) = \frac{1.2.3.4}{1.2.3}$. Hieraus folgt $nP(a^q) = \frac{1.2.3\ldots.q}{1.2.3\ldots.q}$, $nP(a^qb) = \frac{1.2.3\ldots.q(q+1)}{1.2.3\ldots.q}$ und $nP(a^qbc) = \frac{1.2.3\ldots.q(q+1)(q+2)}{1.2.3\ldots.q}$. Hat b auch Wiederholungen, z. B. r, so kommen ebenfalls $1.2.3\ldots r$ mal weniger Permutationen vor; also $nP(a^qb^r) = \frac{1.2.3\ldots q(q+1)\ldots(q+r)}{1.2.3\ldots q.1.2.3\ldots.r}$.

2. Combiniren.

§ 83. Eine Zusammenstellung von einigen Dingen aus mehreren gegebenen, ohne Rücksicht auf die Ordnung der zusammengestellten Dinge, nennt man eine Combination. Ein Element, welches im Alphabet oder bei den Ziffern vor einem andern vorhergeht, heißt niedriger als dieses, dieses höher als jenes, z. B. abc... seien die Elemente, so ist a das niedrigere und b wie auch c das höhere, ferner b das niedrigere und c das höhere Element u. s. w.

§ 84. Eine Veränderung in der Ordnung der Dinge allein macht keine andere Combination; so sind ab, ba identische Combinationen. Um identische Combinationsformen zu vermeiden, gilt die Regel, daß nie auf ein höheres ein niedrigeres Element folge; eine solche Combination nennt man gut geordnet.

§ 85. Man unterscheidet Combinationen ohne und mit Wiederholungen, je nachdem jedes Element bloß mit andern Elementen, oder auch mit sich selbst verbunden werden darf.

§ 86. Die Combinationen werden in Klassen je nach der Anzahl der verbundenen Elemente eingetheilt. Ein einzelnes aus den vorhandenen Elementen heißt eine Combination der ersten Klasse oder Union, eine Zusammenstellung von 2 Elementen eine Combination der zweiten Klasse oder Binion (Ambe), von 3 Elementen eine Combination der dritten Klasse oder Tertion (Terne) u. s. w. Die Klasse schreibt man über C, z. B. $\overset{3}{C}(abcd\ldots.) = abc, abd\ldots, bcd$. Kommen Wiederholungen vor, so werden sie durch den Wiederholungsexponenten bei den einzelnen Elementen angezeigt, als $C(\overset{4}{a}\overset{2}{b}\overset{3}{c})$. Sollen alle Elemente gleichviel wiederholt werden, so schreibt man den Wiederholungsexponenten außerhalb der Klammer, als $\overset{5}{C}(abc\ldots)^3$. Soll jede Combination die Elemente so oft wiederholt enthalten als es der Grad der Klasse erlaubt, so heißen sie Combinationen mit unbedingter Wiederholung. Ist die Anzahl der Elemente unbestimmt, so schreibt man n neben C, z. B. n Elemente von der kten Klasse $= \overset{k}{C}n$. Der Grad der Klasse bei Combinationen ohne Wiederholungen ist jederzeit begränzt und der Anzahl der Elemente gleich; bei Combinationen mit Wiederholungen dagegen ist der Grad der Klasse unbegränzt.

93. Aufg. Die Combinationen ohne Wiederholung für 5 Elemente durch alle Klassen zu entwickeln.

Aufl. $C(abcde) = a,b,c,d,e;$

$\overset{2}{C}(abcde) = ab,ac,ad,ae,bc,bd,be,cd,ce,de;$

$\overset{3}{C}(abcde) = abc,abd,abe,acd,ace,ade,bcd,bce,bde,cde;$

$\overset{4}{C}(abcde) = abcd,abce,abde,acde,bcde;$

$\overset{5}{C}(abcde) = abcde.$

94. Aufg. Die Combinationen mit Wiederholungen für 4 Elemente durch alle Klassen zu entwickeln.

Aufl. $C(abcd) = a,b,c,d;$

$\overset{2}{C}(abcd)^2 = aa,ab,ac,ad,bb,bc,bd,cc,cd,dd;$

$\overset{3}{C}(abcd)^3 = aaa,aab,aac,aad,abb,abc,abd,acc,acd,add,$
$bbb,bbc,bbd,bcc,bcd,bdd,ccc,ccd,cdd,ddd$ u. s. w.,

also unbegränzt.

95. Aufg. Die Anzahl der Combinationen ohne Wiederholung für n Elemente in jeder einzelnen Klasse zu finden.

Aufl. Die Anzahl der Combinationen der ersten Klasse ist offenbar der Anzahl der gegebenen Elemente gleich, also $n\overset{1}{C}n = n = \frac{n}{1}$. Die Anzahl der Combinationen der zweiten Klasse erhält man aus der ersten, wenn man jede Combination dieser Klasse mit allen den Elementen zusammenstellt, welche sie nicht enthält. Jede Combination der ersten Klasse enthält n—1 der gegebenen Elemente nicht, also ist die Anzahl der auf diese Weise erhaltenen Combinationen der zweiten Klasse $= \frac{n(n-1)}{1}$. Man erhält aber auf diese Weise jede Combination der zweiten Klasse doppelt, da sowohl die Union a mit b, als auch die Union b mit a zusammengestellt wird, woraus beidemal die Ambe ab hervorgeht; also $n\overset{2}{C}n = \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}$.

Die Anzahl der Combinationen der dritten Klasse erhält man aus der zweiten, wenn man jede Combination dieser Klasse mit allen den Elementen zusammenstellt, welche sie nicht enthält. Jede Combination der zweiten Klasse enthält aber n—2 Elemente nicht; also ist die Anzahl der auf diese Weise erhaltenen Combinationen der dritten Klasse $= \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \cdot (n-2)$. Betrachtet man aber die Ternion abc, so entsteht diese aus den Amben ab, ac, bc, wenn dieselben respective mit den Elementen c, b, a zusammengestellt werden, so daß also die Terne abc, so wie offenbar jede andere, dreimal vorkommt; also $n\overset{3}{C}n = \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$. Ebenso findet man $n\overset{4}{C}n = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}$ u. s. w. Oder im Allgemeinen ist die Anzahl der Combinationen ohne Wiederholung der kten Klasse für n Elemente, also $n\overset{k}{C}n = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots[n-(k-1)]}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots k}$. Ist k = n, so wird $n\overset{n}{C}n = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots 1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (n-1)n} = 1$. Ist $k > n$ so wird $n\overset{k}{C}n = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots 1 \cdot 0}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots k} = 0$.

96. Aufg. Die Anzahl der Combinationen mit unbedingter Wiederholung für n Elemente in jeder einzelnen Klasse zu finden.

Aufl. Die Anzahl der Combinationen mit Wiederholung der ersten Klasse ist offenbar der Anzahl der gegebenen Elemente gleich; also $n\overset{1}{C}n^{w}$

= n. Die Binionen ohne Wiederholung der zweiten Klasse sind $\frac{n(n-1)}{1.2}$, aber jedes der n Elemente kann auch mit sich selbst verbunden eine Binion geben, als aa, bb....; daher hat man noch n Binionen mehr und demnach ist $n\overset{2}{C}n^n = \frac{n(n-1)}{1.2} + n = \frac{n^2-n+2n}{1.2} = \frac{n(n+1)}{1.2}$.

Jede schon gebildete Binion kann zu Ternionen zusammengestellt werden, erstens mit jedem der n Elemente überhaupt und zweitens mit jedem der zwei Elemente, aus denen sie besteht, überhaupt also mit n + 2 Elementen, also $\frac{n(n+1)(n+2)}{1.2}$ Ternionen. Jede Ternion kommt aber dreimal vor, als ab mit dem Elemente a giebt aba, ab mit seinem a giebt aba, und aa mit b giebt aab, also muß man diese Anzahl noch durch 3 dividiren; folglich $n\overset{3}{C}n^n = \frac{n(n+1)(n+2)}{1.2.3}$. Man findet diese Formel auch auf folgende Art: ohne Wiederholung ist die Anzahl der Combinationen der dritten Klasse $= \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}$. Zu diesen kommen noch hinzu, wenn Wiederholungen gestattet sind, alle die Formen, welche zwei gleiche Elemente enthalten, deren Anzahl n(n — 1) sein muß, weil je zwei gleiche Elemente mit den übrigen n — 1 von ihnen verschiedenen Elementen, sich verbinden lassen, und außerdem noch alle die Formen, welche aus drei gleichen Elementen bestehen, deren Anzahl n ist. Folglich wird $n\overset{3}{C}n^n = \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}$ $+ n(n-1) + n = \frac{n(n-1)(n-2)+6n(n-1)+6n}{1.2.3} = n\left[\frac{(n-1)(n-2)+6n}{1.2.3}\right]$ $= \frac{n(n+1)(n+2)}{1.2.3}$. Ebenso $n\overset{4}{C}n^n = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{1.2.3.4}$ u. s. w. Oder im Allgemeinen ist die Anzahl der Combinationen mit unbedingter Wiederholung der kten Klasse für n Elemente

$$n\overset{k}{C}n^n = \frac{n(n+1)(n+2)\ldots.(n+k-1)}{1.2.3\ldots.k}.$$

Der binomische Lehrsatz für positive und negative Exponenten [25].

Entwickelt man (x+a)(x+b), so ist's $= x^2 + \begin{array}{l|} a \\ +b \end{array} x + ab$. Multiplicirt man diese Gleichung mit (x+c), so ist

---

[25]) Hindenburg hat zuerst den binomischen Lehrsatz durch die Combinationslehre bewiesen.

$$(x+a)(x+b)(x+c)=x^3\begin{array}{l|r|l}+a & x^2+ab & x+abc, \text{ ebenso}\\ +b & +ac & \\ +c & +bc & \end{array}$$

$$(x+a)(x+b)(x+c)(x+d)=x^4\begin{array}{r|r|r|l}+a & x^3+ab & x^2+abc & x+abcd\\ +b & +ac & +abd & \\ +c & +ad & +acd & \\ +d & +bc & +bcd & \\ & +bd & & \\ & +cd & & \end{array}$$

und sind n Faktoren: $(x+a)(x+b)(x+c)(x+d)\dots(x+m)$

$$=x^n\begin{array}{r|r|r|l}+a & x^{n-1}+ab & x^{n-2}+abc & x^{n-3}\dots\dots+abcd\dots m.\\ +b & +ac & +abd & \\ +c & +ad & +acd & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \\ +m & & & \end{array}$$

Betrachtet man a, b, c....m als Elemente, so sind die Coefficienten von x^{n-1}, x^{n-2} Combinationen der ersten, der zweiten, der dritten u. s. w. Klasse ohne Wiederholungen. Soll nun $(x+a)$ zur nten Potenz erhoben werden, so werden b, c, d ... m sämmtlich gleich a. Da hier a, a^2, a^3 u. s. w. Zahlenwerthe sind, so werden sie herausgehoben und nur die Anzahl der a, a a, a a a ... betrachtet, somit erhält man $(x+a)^n = x^n + n\overset{1}{C}n x^{n-1}a + n\overset{2}{C}n x^{n-2}a^2 + n\overset{3}{C}n x^{n-3}a^3 \dots\dots + n\overset{n}{C}n x^{n-n}a^n = x^n + nx^{n-1}a + \frac{n(n-1)}{1.2}x^{n-2}a^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}x^{n-3}a^3 \dots + a^n$.

Ist n negativ und $x > a$, so läßt sich die Form $(x+a)^{-n}$ verwandeln in $\left[x\left(1+\frac{a}{x}\right)\right]^{-n} = x^{-n}(1+ay)^{-n}$, wo $ay < 1$. Dividirt man nun die Einheit durch $1+ay$, so kommt:

$\frac{1}{1+ay} = 1 - ay + a^2y^2 - a^3y^3 \dots a^{m-1}y^{m-1} \pm \frac{a^my^m}{1+ay}$. Da $ay<1$, so wird mit wachsendem m, a^my^m verschwindend klein, so daß man setzen kann: $\frac{1}{1+ay} = 1 - ay + aay^2 - aaay^3 \dots$. Dividirt man abermals, unter der Voraussetzung $by<1$, die vorstehende Reihe durch $1+by$, so kommt: $\frac{1}{(1+ay)(1+by)}$

$$=1\begin{array}{r|r|l}-a & y+aa & y^2\dots\dots = 1 - \overset{1}{C}(a,b)\,y + \overset{2}{C}(a,b)^2y^2\\ -b & +ab & \quad - \overset{3}{C}(a,b)^3y^3\dots\dots \pm \overset{m}{C}(a,b)^my^m.\\ & +bb & \end{array}$$

Dividirt man abermals durch $1+cy$, unter der Voraussetzung $cy < 1$, so ergiebt sich auf gleiche Weise

$$\frac{1}{(1+ay)(1+by)(1+cy)} = 1 - \overset{1}{C}(a,b,c)^1 y + \overset{2}{C}(a,b,c)^2 y^2 - \overset{3}{C}(a,b,c)^3 y^3 \ldots$$

So fortfahrend erhält man: $\frac{1}{(1+ay)(1+by)(1+cy)\ldots\ldots(1+my)}$

$$= 1 - \overset{1}{C}(n)\,y + \overset{2}{C}(n)^2 y^2 - \overset{3}{C}(n)^3 y^3 \ldots\ldots$$

Es ist aber die Anzahl von $\overset{1}{C}(n)^1 = n$;

" " " " $\overset{2}{C}(n)^2 = \frac{n(n+1)}{1.2}$;

" " " " $\overset{3}{C}(n)^3 = \frac{n(n+1)(n+2)}{1.2.3}$ u. s. w.

Wird $b, c, d \ldots\ldots m = a$, so hat man $\frac{1}{(1+ay)^n} = (1+ay)^{-n}$

$= 1 - nay + \frac{n(n+1)}{1.2} a^2 y^2 - \frac{n(n+1)(n+2)}{1.2.3} a^3 y^3 \ldots\ldots$ Setzt man

wieder für $y = \frac{1}{x}$, so wird $\frac{1}{\left(1+\frac{a}{x}\right)^n} = \left(1+\frac{a}{x}\right)^{-n}$

$$= 1 - nax^{-1} + \frac{n(n+1)}{1.2} a^2 x^{-2} - \frac{n(n+1)(n+2)}{1.2.3} a^3 x^{-3} \ldots\ldots$$

und multiplicirt man die Reihe mit x^{-n}, so erhält man:

$$(x \pm a)^{-n} = x^{-n} \mp nax^{-(n+1)} + \frac{n(n+1)}{1.2} a^2 x^{-(n+2)}$$

$$\mp \frac{n(n+1)(n+2)}{1.2.3} a^3 x^{-(n+3)} \ldots \text{ unbegränzt.}$$

3. Variiren.

§ 87. Variationen sind die Combinationen gegebener Elemente mit ihren Permutationen. Der Unterschied zwischen Variationen ohne und mit Wiederholungen erhellt aus dem Vorigen.

97. Aufg. Die Variationen ohne Wiederholung für 3 Elemente durch alle Klassen zu entwickeln.

Aufl. $V(a\,b\,c) = a, b, c;$

$\overset{2}{V}(a\,b\,c) = ab, ac, ba, bc, ca, cb;$

$\overset{3}{V}(a\,b\,c) = abc, acb, bac, bca, cab, cba.$

98. Aufg. Die Variationen mit unbedingter Wiederholung für 3 Elemente durch alle Klassen zu entwickeln.

Aufl. $V(a\,b\,c) = a, b, c;$

$\overset{2}{V}(a\,b\,c)^2 = aa, ab, ac, ba, bb, bc, ca, cb, cc;$

$\overset{3}{V}(a\,b\,c)^3 =$ aaa, aab, aac, aba, abb, abc, aca, acb, acc, baa, bab, bac, bba, bbb, bbc, bca, bcb, bcc, caa, cab, cac, cba, cbb, cbc, cca, ccb, ccc.

u. s. w. unbegränzt.

99. Aufg. Die Anzahl der Variationen ohne Wiederholung für n Elemente für alle Klassen zu entwickeln.

Aufl. Die Anzahl der Variationen der ersten Klasse ist offenbar der Anzahl der gegebenen Elemente gleich, also $n\overset{1}{V}n = n$. Die Anzahl der Variationen der zweiten Klasse erhält man, wenn man jede Variation der ersten Klasse mit allen den Elementen zusammenstellt, welche sie nicht enthält; also $n\overset{2}{V}n = n(n-1)$. Ebenso für die dritte Klasse $n\overset{3}{V}n = n(n-1)(n-2)$; also allgemein für die kte Klasse, da jede Form der $(k-1)$ten mit den noch übrigen $n-(k-1)$ Elementen der Reihe nach zusammenzustellen ist, $n\overset{k}{V}n = n(n-1)(n-2)\ldots.[n-(k-1)]$.

100. Aufg. Die Anzahl der Variationen mit unbedingter Wiederholung für n Elemente für alle Klassen zu entwickeln.

Aufl. $n\overset{1}{V}n^n = n$. Da jede Variation der ersten Klasse mit allen Elementen zusammengestellt werden kann, so ist $n\overset{2}{V}n^n = n\,.\,n = n^2$ und $n\overset{3}{V}n^n = n^3$; allgemein $n\overset{k}{V}n^n = n^k$.

§ 88. Die mathematische Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses wird bestimmt durch das Verhältniß der Anzahl der diesem Ereignisse günstigen Fälle zu der Anzahl aller möglichen Fälle. Man drückt daher die mathematische Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses durch einen Bruch aus, dessen Zähler die Anzahl der günstigen Fälle, dessen Nenner die Anzahl aller möglichen Fälle ist. Wenn die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses $1/2$ übersteigt, so sagt man kurzweg, das Ereigniß ist *wahrscheinlich*. Ist die

Wahrscheinlichkeit $= 1/2$, so wird das Ereigniß zweifelhaft, d. h. die Gründe für und gegen das Ereigniß sind gleich groß zu achten. Das Ereigniß wird unwahrscheinlich, wenn der Bruch kleiner als $1/2$ ist. Die Wahrscheinlichkeit ist daher desto größer, je näher der Werth des Bruches der Einheit kömmt und die Einheit selbst ist das Symbol der Gewißheit.

Beispiele. 1) Die 32 Blätter eines Spieles Karten werden unter 4 Personen A, B, C und D vertheilt; wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß A irgend eines von den 4 As' erhalte? Das bezeichnete Blatt kann A oder B oder C oder D haben, also sind 4 Fälle möglich, aber nur 1 Fall für A günstig, folglich ist die Wahrscheinlichkeit für $A = 1/4$. Die Wahrscheinlichkeit, daß eine der übrigen drei Personen ein As haben kann, ist $3/4$ und beide Wahrscheinlichkeiten zusammen sind $= 1/4 + 3/4 = 1$.

2) Hat man ein Spiel von 32 Karten, unter welchen 12 Bilder sind, und es wird eine Karte gezogen, so ist die Wahrscheinlichkeit, daß diese ein Bild sein werde $12/32 = 3/8$. Es läßt sich also 3 gegen 8 wetten, daß man ein Bild, 8 gegen 3 aber wetten, daß man kein Bild ziehen werde.

(Aufg. Sammlg. § 48. 8—15, 23—29 und § 49. 4—9.)

Druckfehler.

Seite 2 Zeile 9 v. u. statt $-5>$ lies $-5<$

„ 9 „ 6 v. o. „ $\overset{\alpha}{\log} b$ „ $\overset{a}{\log} b$

„ 21 „ 19 v. o. „ 2) $2/3$ ab.... lies 2) ($2/3$ab....

„ 24 „ 1 v. o. „ $\frac{a^m}{b^m}$ oder $\frac{a^m}{b^m}$ lies $\frac{am}{bm}$ oder $\frac{am}{bm}$.

„ 24 „ 10 v. o. „ 420acdf lies $420acd^2f$

„ 28 „ 2 v. o. im Nenner statt $26a^2cd$ lies $36a^2cd$

„ 28 „ 10 v. o. im Nenner statt ba^3b lies $4a^3b$

„ 28 „ 15 v. o. statt $7b^5$ lies $7b^3$

„ 35 „ 4 v. o. „ $\frac{o}{o}$ lies $\frac{o}{a}$

Seite 38 „ 1 v. u. „ $(a\pm b):(c\pm d)$ lies $(a+b):(c+d)$
„ 39 „ 10 v. o. „ $b:z$ lies $c:z$.
„ 41 „ 6 v. v. „ $d:x$ lies $b:x$
„ 53 „ 16 v. o. „ $\overset{3}{\underset{c}{a}}b$ lies $\overset{3}{\underset{c}{a}}$
„ 53 „ 16 v. o lies $\overset{c}{\underset{3}{b}}$ lies $\overset{3}{\underset{c}{b}}$
„ 53 „ 10 v. u. „ $\overset{n-2}{\underset{c}{a}}b^2$ lies $\overset{n-2}{\underset{c}{a}}\overset{2}{\underset{c}{b}}$
„ 54 „ 5 v. o. „ $\overset{2}{a}\overset{n-1}{\underset{c}{b}}$ lies $\overset{2}{\underset{c}{a}}\overset{n-1}{\underset{c}{b}}$
„ 54 „ 7 v o. „ $\overset{2}{a}\overset{n-1}{\underset{c}{b}}$ lies $\overset{2}{\underset{c}{a}}\overset{n-1}{\underset{c}{b}}$
„ 54 „ 10 v. o. „ $\overset{n+1}{\underset{c}{a}}$ lies $\overset{n-1}{\underset{c}{a}}$
„ 54 „ 11 v. o. „ $(n+1)n$ lies $(n-1)n$
„ 56 „ 1 v. o. „ $(\pm b)^2 n = b^{2u}$ lies $(\pm b)^{2n} = b^{2n}$
„ 60 „ 1 v. o. „ $7^{-4/8}$ lies $7^{-4/3}$
„ 94 „ 9 v. u. „ 5a lies 5x
„ 99 „ 1 v. o. „ $\frac{a_1 d_1}{\beta_1}$ lies $\frac{\alpha_1 d_1}{\beta_1}$
„ 101 „ 4 v. u. „ $\pm b$ lies $\mp b$
„ 102 „ 16 v. u. „ $\frac{35}{12} =$ lies $\frac{35}{12} +$
„ 106 „ 4 v. u. „ $\frac{\pm\sqrt{q}}{tg\varphi}$ lies $\frac{\mp\sqrt{q}}{tg\,\varphi}$
„ 110 „ 11 v. u. „ $x=a\pm$ lies $x=a\mp$
„ 111 „ 11 v. o. „ $2\frac{a-b}{\sqrt[3]{2a-b}}$ lies $\frac{a-b}{2\sqrt[3]{2a-b}}$
„ 113 „ 8 v. o. „ $f-1$, lies $f=1$,
„ 116 „ 6 v. o. $[2a+(r-1)\delta^{\frac{r}{2}}$ lies $[2a+(r-1)\delta]^{\frac{r}{2}}$
„ 118 „ 17 v. o. $a(e^{n-1})$ lies $a(e^n-1)$
„ 120 „ 12 v. o. $\frac{12}{2}$ lies $\frac{1.2}{2}$
„ 120 „ 12 v. u. $\frac{(n-1)(n-2+2)}{12}$ lies $\frac{(n-1)(n-2+2)}{1.2}$
„ 124 „ 1 v. u. „ $\left(m+\frac{h}{p}\right)$ lies $\left(m+\frac{h}{q}\right)$
„ 126 „ 16 v. o. „ dritten lies zweiten
„ 126 „ 1 v. u. „ $\frac{sf(f^n-1}{f-1}$ lies $\frac{sf(f^n-1)}{f-1}$
„ 132 „ 12 v. u. „ $3.10.1$ lies 3.10^{-1}.

